Gauss Formülünün Genelleştirilmesi

Tosun Terzioğlu

1'den n'ye kadar tamsayıların toplamını veren

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

formülüne genellikle *Gauss* formülü denir. Çok ünlü bir matematikçi olan Gauss ilkokulda iken bir gün sınıfa kızan öğretmeni tüm öğrencilerin birden yüze kadar sayıları toplamalarını istemiş ceza olarak. Kısa bir süre sonra küçük Gauss'un bir şey yapmadan oturduğunu görünce biraz da öfkeyle ona cevabı sormuş. Gauss'un cevabı doğruymuş. Çünkü o sayıları alt alta sıralayıp toplamak yerine (1,100), (2,99), (3, 98), (4,97)... gibi çiftler olarak düşünmüş. Her çiftteki sayıların toplamı 101 ve 50 tane çift var. Böylece 50 x 101 = 5050 olarak hemen bulmuş.

Şimdi Gauss formülünü genelleştirmeye çalışalım. Örneğin 1'den başlayarak bir n sayısına kadar tüm tam sayıların karelerini toplarsak

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

elde ederiz. Bu formülü tümevarımla oldukça kolay ispat edebiliriz. Elde ederiz dedik, ama nasıl? Daha genel olarak, 1'den büyük bir k tamsayısı için

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k=T_k(n)$$

toplamını bulmaya çalışalım. Bu toplamda ve bundan böyle, n'yi bağımsız bir değişken gibi düşüneceğiz. İlkin $T_k(n)$ ifadesinin neye benzediğini bulmaya çalışalım.

Bu toplamı sondan başlayarak $n^k+(n-1)^k+\ldots+(n-(n-1))^k$ şeklinde düşünürsek, her biri k. dereceden n tane polinomun toplamı olduğunu görürüz. $n \times n^k = n^{k+1}$; demek ki $T_k(n)$ derecesi k + 1 olan bir polinom. Öyleyse

$$T_k(n)=b_{k+1}n^{k+1}+b_kn^k+\ldots+b_1n+b_0$$

şeklindedir. Şimdi işimiz buradaki $b_{k+1}, b_k, \ldots, b_1, b_0$ katsayılarını belirlemek. Bilinmeyen sayısı k + 2 ve bu nedenle de k + 2 tane denklem bulup, çıkan sistemi çözmemiz gerekiyor. Örneğin, k = 5 için 7 bilinmeyenli 7 denklem. Bu işe rastgele kalkışırsak sonuç pek parlak olmayacak gibi. Biraz düşünelim...

$T_k(n+1)-T_k(n)=(n+1)^k$ olduğundan

$$b_{k+1}((n+1)^k-n^k)+b_k((n+1)^k-n^k)$$
$$+\ldots+b_2((n+1)^2-n^2)+$$
$$b_1=(n+1)^k=n^k+kn^{k-1}+\ldots+1$$

elde ederiz. n'yi bağımsız değişken gibi düşünecektik. Dolayısıyla yukarıdaki formülde n'nin 0., 1., 2., ..., k. kuvvetlerinin katsayıları ayrı ayrı eşit olmalı. Tersten başlayalım işe. Sağ tarafta n^k'nın katsayısı 1, solda ise, $(n+1)^k-n^k$ ifadesinde, n^k'nin katsayısı (k + 1). Daha sonra gelen ifadelerdeyse n^k yok. Dolayısıyla $(k+1)b_{k+1}=1$, yani

$$b_{k+1}=\frac{1}{k+1}$$

bulduk. n^{k-1}'in sağ taraftaki katsayısı k. Solda ise n^{k-1} sadece birinci ve ikinci terimlerde var. Buradan kolayca

$$\frac{(k+1)k}{2}b_{k+1}+kb_k=k$$

denklemini elde ederiz. b_{k+1}'in bulduğumuz değerini yerine koyarak, $b_k=k/2$ olduğunu görürüz. Bu yöntem gerçekten sonuca vardıracak bizi. b_{k+1} ve b_k katsayılarını bulduk. n^{k-2}'nin katsayılarını eşitleyerek, örneğin bir sonraki adımda $b_{k-1}=(k-1)/12$ elde ederiz.

Yöntemi k = 3 özel hali için kullanalım bir de. Burada $b_4=1/4$, $b_3=1/2$, $b_2=1/6$ olduğunu genel sonuçtan biliyoruz. Sabit terim, yani $n^0=1$'in, katsayılarını eşitlersek,

$$b_4+b_3+b_2+b_1=1$$

ve buradan da $b_1 = 1/12$ elde ederiz. İyi ama bir de b_0 var. Onu da $T_3(1) = 1$ eşitliğinden bulabiliriz hemen.

$T_3(1) = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$

olacak. Bu da $b_0 = 0$ verir. Dolayısıyla,

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{12}n^2 + \frac{1}{12}n$$

$$= \frac{n}{12}(3n^3 + 6n^2 + n + 1)$$

formülünü ispat ettik.

Yeniden genel hale dönelim. Ana denklemimiz

$$b_{k+1}((n+1)^{k+1} - n_{k+1}) + b_k((n+1)^k - n^k)$$

$$+ \ldots + b_1 = (n+1)^k$$

idi. Şimdi de bilinmeyen katsayıları bulmak için kullandığımız yöntemi biraz irdeleyelim. İsterseniz $k = 5$ alalım; bir de elimizin altında $k + 1 = 6$'ya kadar Pascal üçgeni olsun.

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Sağ tarafta n'nin en yüksek kuvveti 5 ve katsayısı 1. Solda ise $6b_6$. İlk denklemimiz şu.

$$6b_6 = 1$$

Sağ tarafta, yani $(n + 1)^5$ ifadesinin açılımında n^4'ün katsayısı 5. Pascal üçgeninin sondan bir önceki sırasındaki ikinci sayı. Sol tarafta ise n^4'ün katsayısı $15b_6 + 5b_5$. Yani

$$15b_6 + 5b_5 = 5$$

Biraz düşünürsek ve Pascal üçgenine bakarsak sonraki denklemleri de yazabiliriz. Bunlara daha önceki iki denklemi de ekleyelim.

$$\begin{aligned}
6b_6 &= 1\\
15b_6 + 5b_5 &= 5\\
20b_6 + 10b_5 + 4b_4 &= 10\\
15b_6 + 10b_5 + 6b_4 + 3b_3 &= 10\\
6b_6 + 5b_5 + 4b_4 + 3b_3 + 2b_2 &= 5\\
b_6 + b_5 + b_4 + b_3 + b_2 + b_1 &= 1
\end{aligned}$$

Sistemde sağ taraf $(n + 1)^5$'in açılışının katsayılarından, yani üçgendeki 5. sıradan elde ediliyor. Sol tarafı da gördünüz sanırım; ama isterseniz bir de yeniden Pascal üçgenine bakıverin. Yukarıdaki denklemleri kolayca çözüp, $T_5(n)$ için formül bulabilirsiniz. Bir de, $T_k(1) = 1$ ve son denklemden, genel halde $b_0 = 0$ olduğunu görebilirsiniz.

İleride, bir başka yazıda, bu problemle biraz daha uğraşacağız.

ASAL SAYILARLA SİHİRLİ KARE

Birbirinden farklı dokuz asal sayı bularak 3X3 sihirli bir kare elde ediniz. (1'in asal sayı olarak edilmediğini hatırlayınız.)