GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

EMRE ALKAN

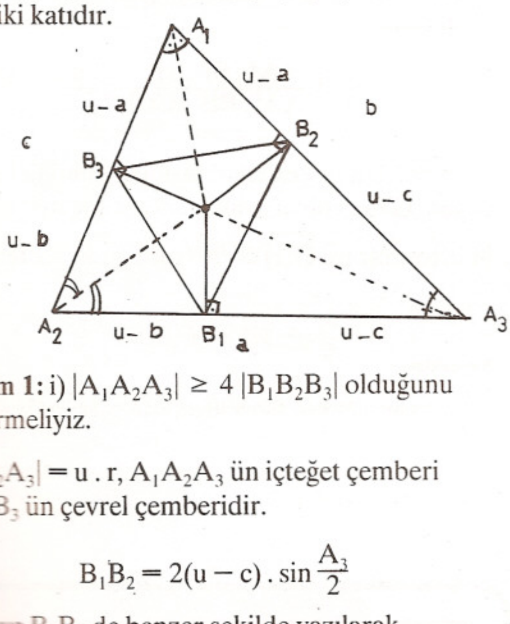
Bir AB ... F çokgeninin alanını |AB ... F| ile göstereceğiz.

Problem 1: Köşeleri A_1, A_2, A_3 olan üçgenin içteğet çemberi kenarlara sırayla B_1, B_2, B_3 te değmektedir. A_1 B_1 içteğet çemberi C_1 de kessin C_2 ve C_3 te benzer şekilde tanımlansın. Aşağıdakileri gösteriniz:

i) $A_1A_2A_3$ ün alanı $B_1B_2B_3$ ün alanının en az dört katıdır.

ii) $A_1A_2A_3$ ün çevresi $B_1C_2B_3C_1B_2C_3$ ün çevresinin en az $\sqrt{3}$ katıdır.

iii) $A_1A_2A_3$ ün alanı $B_1C_2B_3C_1B_2C_3$ ün alanının en az iki katıdır.



Çözüm 1: i) $|A_1A_2A_3| \geq 4\,|B_1B_2B_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$|A_1A_2A_3| = u\,.\,r$, $A_1A_2A_3$ ün içteğet çemberi $B_1B_2B_3$ ün çevrel çemberidir.

$$B_1B_2 = 2(u-c)\,.\,\sin\frac{A_3}{2}$$

B_2B_3 ve B_3B_1 de benzer şekilde yazılarak

$$|B_1B_2B_3| = \frac{2}{r}(u-a)(u-b)(u-c)\,.$$
$$\sin\frac{A_1}{2}\,.\,\sin\frac{A_2}{2}\,.\,\sin\frac{A_3}{2}$$

eşitsizliği çıkar.

sonuç olarak, C. Koç'un yazısındaki (11) ve (16) kullanılırsa istenen

$$|B_1B_2B_3| = 2|A_1A_2A_3|\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2}{2}\sin\frac{A_3}{2} \leq \frac{1}{4}|A_1A_2A_3|$$

eşitsizliği çıkar.

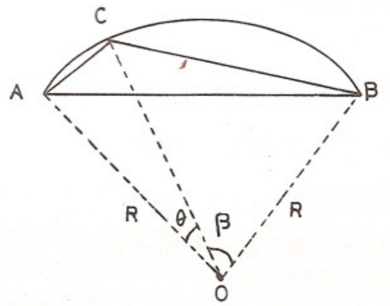
ii) Şu iki ifadeye bakalım:

* " $A_1A_2A_3$ eşkanar olduğundan $B_1C_2B_3C_1B_2C_3$'ün çevresi maksimum değerini alır.

** "İçteğet çemberleri eş olan üçgenler iinde minimum çevreli üçgen eşkenardır."

* ve **'yi gösterirsek, $A_1A_2A_3$ eşkenar olduğunda bir minimumla bir maksimumu aynı anda yakalamış oluruz. Bu ise derhal problemin ii) ve iii) kısımlarını gösterecektir.

*'in ispatı: $B_1C_2B_3C_1B_2C_3$'ün bir düzgün altıgen olması gerektiğini göstereceğiz.



$\overset{\frown}{ACB}$ üzerinde öyle bir C bulalım ki AC + BC maksimum olsun.

$$AC + BC = 2R\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right)$$

R ve $\frac{\theta+\beta}{2}$ sabittir.

$$\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\beta}{2} = \underbrace{2\sin\frac{\theta+\beta}{4}}_{\text{sabit}}\,.\,\cos\frac{\theta-\beta}{4}$$

ancak ve ancak $\theta = \beta$ olduğunda AC + BC maksimum olur. C, $\overset{\frown}{ACB}$ yayının orta noktası olmalıdır.

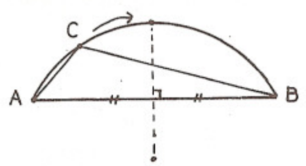
Buradan şu sonucu çıkarabiliriz. Düzgün olmayan bir altıgenin çevresi büyütülebilir.

Aynı bir çember içinde maksimum çevreli düzgün altıgendir.

**ise C. Koç'un yazısındaki (15) eşitsizliğinin bir yorumundan ibarettir. Şu halde içteğet çemberleri eş üçgenler ailesi içinde minimum çevreli eşkenar üçgendir. $A_1A_2A_3$ eşkenar olduğu zaman

$$\text{çevre}\,(A_1A_2A_3) = \sqrt{3}\ \text{çevre}\,(B_1C_2B_3C_1B_2C_3)$$

olduğu görülebilir. Bu ii)'yi ispatlar.
iii) $S = u \,.\, r$ olduğundan eş bir içteğet çemberi için minimum alanlı üçgen de eşkenardır. Maksimum alanlı altıgenin düzgün olduğu gösterilerek iii) ispatlanır.
Düzgün altıgenin maksimum alanlı olduğunu görmek için bir yay üzerindeki ortak tabanlı üçgenlerden maksimum alana sahip olanın ikizkenar olduğunu gözlemek yeterlidir.



Problem 2. Birinci problemde B_1C_3, B_2C_3, B_2C_1, B_3C_1, B_3C_2, B_1C_2 uzunluklarından en az birinin $12^{-3/4} \,.\, \left(\frac{abc}{r}\right)^{1/2}$ ifadesinden küçük veya eşit olduğunu gösteriniz.
Çözüm 2: Birinci problemde olduğu gibi $A_1A_2A_3$'ün içteğet çemberini sabit tutalım. $A_1A_2A_3$'ün çevrel çember yarıçapı R olsun.

$$|A_1A_2A_3| = \frac{1}{4R} \,.\, a \,.\, b \,.\, c \Rightarrow$$

$a \,.\, b \,.\, c = 4R \,.\, |A_1A_2A_3|$ elde ederiz. $A_1A_2A_3$ eşkenar olduğundan $|A_1A_2A_3|$ alanının minimum olduğunu 1. problemde bulduk. Euler Teoremine göre $R \geq 2r =$ sabit ve eşitlik ancak üçgen eşkenarsa vardır. Şu halde $A_1A_2A_3$ eşkenarsa R'de minimum olmaktadır. Bundan dolayı $a \,.\, b \,.\, c$ ifadesi üçgen eşkenarsa minimum olur.
Şimdi şunu gösterelim: Bir çember içine çizilen altıgenlerden kenarları çarpımı maksimum olan düzgün altıgendir.

$AC \,.\, BC$'nin ne zaman maksimum olacağına bakalım.

$$|ABC| = \frac{1}{2} AC \,.\, BC \,.\, \sin\theta$$

yazılabilir. C, $\widehat{ACB}$'nin orta noktası ise ABC alanı maksimum iken $\sin\theta$ sabit olduğundan dolayısıyla $AC \,.\, BC$'de maksimum olur. Şu halde düzgün altıgenin kenarları çarpımı maksimumdur. Böylece $A_1A_2A_3$ eşkenarken bir maksimumla bir minimum yakaladık. Böylece,

$$B_1C_3 \,.\, B_2C_3 \,.\, B_2C_1 \,.\, B_3C_1 \,.\, B_3C_2 \,.\, B_1C_2 \leq (a \,.\, b \,.\, c)^2 / 3^3 \,.\, 4^3 \qquad (1)$$

elde ederiz. Ceva teoremi yardımıyla

$$\frac{u-a}{u-b} \cdot \frac{u-b}{u-c} \cdot \frac{u-c}{u-a} = 1$$

olduğundan A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 doğruları bir noktada kesişirler. Benzerlikten

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{x_2}{x_4},\ \frac{a_3}{a_6} = \frac{x_4}{x_6},\ \frac{a_5}{a_2} = \frac{x_6}{x_2}$$

yazılıp taraf tarafa çarpılırsa

$$a_1 \,.\, a_3 \,.\, a_5 = a_2 \,.\, a_4 \,.\, a_6$$

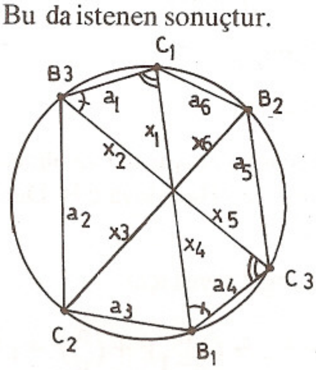
$$\Rightarrow B_3C_1 \,.\, B_1C_2 \,.\, B_2C_3 = B_3C_2 \,.\, B_1C_3 \,.\, B_2C_1$$

elde edilir.
Altıgenin kenarlarını böylece çarpımları eşit iki kümeye ayırmış olduk. Altıgenin kenarlarından en az biri içteğet çember yarıçapından büyük veya eşit olmalıdır. Genelliği bozmadan $B_3C_1 \geq r$ kabul edelim. (1) eşitsizliğinden, $B_3C_1 \,.\, B_1C_2 \,.\, B_2C_3 \leq abc/24\sqrt{3}$, $B_3C_1 \geq r$ olduğu kullanılırsa, $r \,.\, B_1C_2 \,.\, B_2C_3 \leq abc/24\sqrt{3}$, genelliği bozmadan $B_1C_2 \leq B_2C_3$ alalım.

$$\Rightarrow (B_1C_2)^2 \leq \frac{abc}{r} \cdot \frac{\sqrt{3}}{72} \Rightarrow$$

$$B_1C_2 \leq 12^{-3/4} \,.\, \left(\frac{abc}{r}\right)^{1/2}$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.



Alıştırma: Bir üçgenin kenarları a, b, c alanı da S olsun.

$$a^2 + b + c^2 > 6 \,.\, S$$

olduğunu gösteriniz.