BÖLÜNEBİLMEDE YENİ YÖNTEMLER

Fahrettin Akbulut

Bilindiği gibi, a ve b tamsayıları için $a = kb$ olacak biçimde bir k tamsayısı bulabiliyorsak a sayısı b ile bölünebilir ya da b sayısı a yı böler diyor ve $b|a$ yazıyoruz. a ile b nin pozitif ortak bölenlerinin en büyüğünü ($OBEB$ ini) (a, b) ile gösteriyor ve $(a, b) = 1$ ise yani a ile b nin 1 den başka pozitif ortak böleni yoksa a ile b *aralarında asaldır* diyoruz.

Herkesçe bilinen şu iki temel özelliği anımsayalım:

- Üç tane a, b, $a + b$ (ya da $a - b$) tamsayısından herhangi ikisi bir c tamsayısı ile bölünebilirse üçüncü de bölünür.
- $c|ab$ ve $(c, a) = 1$ ise $c|b$ dir.

Bu iki basit özellikten bir A tamsayısının 2'nin ya da 5'in katı olmayan (yani 10 ile aralarında asal olan) bir b tamsayısı ile bölünüp bölünemediğini araştırmada kullanılabilecek bir yöntem çıkarmak istiyoruz. Şöyle ki 10 ile aralarında asal olan bu b sayısının son rakamı 1, 3, 7, 9'dan biri olacaktır. Bu b sayısını 1, 3, 7, 9 ile çarptığımızda ortaya çıkacak sayılardan birinin son rakamı 1 birinin de 9 olur; yani bu kb biçimindeki sayılardan biri $10m + 1$ bir başkası $10m - 1$ biçimindedir. Sözgelimi $b = 37$ için $3b = 111 = 10 \times 11 + 1$ ve $7b = 259 = 10 \times 26 - 1$ dir. Bu bizi şu teoreme götürür:

Teorem x, y, k, m **ve** b **herhangi tamsayılar olduğuna göre**

$$\left.\begin{array}{r} A = 10x + y \\ kb = 10m + 1 \end{array}\right\} \text{ ise } b|A \Leftrightarrow b|x - my;$$

$$\left.\begin{array}{r} A = 10x + y \\ kb = 10m - 1 \end{array}\right\} \text{ ise } b|A \Leftrightarrow b|x + my$$

olur.

İspat Bu sonucu ispatlamak için $kb = 10m + 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} A &= 10x + y = 10x + y - kby + kby \\ &= 10x + y - (10m + 1)y + kby \\ &= 10(x - my) + kby \end{aligned}$$

olduğu için b sayısı A, $10(x - my)$, kby tamsayılarından ikisini bölerse üçüncüsünü de böler yani

$$b|A \Leftrightarrow b|10(x - my)$$

dir. Oysa $(b, 10) = 1$ olduğu için

$$b|A \Leftrightarrow b|10(x - my) \Leftrightarrow b|x - my$$

sonucu elde edilir.

$kb = 10m - 1$ durumu için de aynı ispat tekrarlanabilir ya da değişiklik olsun diye $kb = 10m - 1$ ise $k(-b) = 10(-m) + 1$ olur ve dolayısıyla

$$b|A \Leftrightarrow -b|A \Leftrightarrow b|x + (-m)y$$

elde edilir diyebiliriz. Böylece bölünebilmeye ilişkin yeni iki kural elde etmiş olduk:

b'nin bir tam katı $10m + 1$ ise $b|10x + y$ demek $b|x - my$ demektir.

b'nin bir tam katı $10m - 1$ ise $b|10x + y$ demek $b|x + my$ demektir. Burada y bölünecek sayının birler basamağı x ise bu basamak atıldığı zaman kalan sayıdır.

Şimdi örneklerle bu kuralların kullanılışını görelim:

Örnek 1. 441 sayısı 7 ile bölünür mü?

Çözüm 1.

$$\left.\begin{array}{r} 441 = 10.44 + 1 \\ 3.7 = 10.2 + 1 \end{array}\right\} \text{ den } x = 44, y = 1, m = 2$$

yani $x - my = 44 - 2$ olup $7|441 \Leftrightarrow 7|44 - 2 = 42$ çıkar ve $7|441$ olduğu görülür.

Çözüm 2.

$$\left.\begin{array}{r} 441 = 10.44 + 1 \\ 7.7 = 10.5 - 1 \end{array}\right\} \text{ den } x = 44, y = 1, m = 5$$

ve $x + my = 44 + 5.1 = 49$ elde edilir ve $7|49$ olduğundan $7|441$ çıkar.

Örnek 2. 2871 sayısı 11, 13, 17 ve 29'dan hangileri ile bölünür?

Çözüm. Bölen sayıların katlarını $10m + 1$ ya da $10m - 1$ biçiminde yazacak olursak

$$\begin{aligned} 11 &= 10.1 + 1 \\ 3.13 &= 10.4 - 1 \\ 3.17 &= 10.5 + 1 \\ 29 &= 10.3 - 1 \end{aligned}$$

olur. Demek ki, $x \pm my$ ler

11	için	$x - my = x - y$
13	için	$x + my = x + 4y$
17	için	$x - my = x - 5y$
29	için	$x + my = x + 3y$

olmaktadır. Böylece

$11|2871 \Leftrightarrow 11|287-1=286 \Leftrightarrow 11|28-6=22$ den $11|2871$;

$13|2871 \Leftrightarrow 13|287+4=291 \Leftrightarrow 13|29+4=33$ den $13\nmid 2871$;

$17|2871 \Leftrightarrow 17|287-5=282 \Leftrightarrow 17|28-10=18$ den $17\nmid 2871$;

$29|2871 \Leftrightarrow 29|287+3=290 \Leftrightarrow 29|29+0=29$ dan $29|2871$;

sonuçları elde edilir.

Son olarak okuyucuya kolaylık sağlaması için aşağıdaki çizelgeyi veriyoruz

$A = 10x + y$			
$p = 10m + 1$		$q = 10m - 1$	
11	$x - y$	9, 3	$x + y$
21, 3, 7	$x - 2y$	19	$x + 2y$
31	$x - 3y$	29	$x + 3y$
41	$x - 4y$	39, 3, 13	$x + 4y$
51, 3, 17	$x - 5y$	49, 7	$x + 5y$
61	$x - 6y$	59	$x + 6y$
71	$x - 7y$	69, 3, 23	$x + 7y$
81, 3, 9	$x - 8y$	79	$x + 8y$
91, 7, 13	$x - 9y$	89	$x + 9y$

Alıştırmalar:

1) 4418 sayısının 13, 19, 37 sayılarından hangileriyle bölünebildiğini araştırınız.

2) $kb = 10m + 1$ durumundaki yolu izleyerek

$$\left.\begin{array}{r} A = 10x + y \\ kb = 10m - 1 \end{array}\right\} \text{ ise } b|A \Leftrightarrow b|x + my$$

önermesini ispatlayınız.

3)

$$\left.\begin{array}{r} A = 10x + y \\ kb = 10m + 3 \end{array}\right\} \text{ ise } b|A \Leftrightarrow b|x + (3m+1)y$$

önermesini ispatlayınız.

PROF.DR.TÜRKAN BAŞGÖZE'Yİ KAYBETTİK

Matematik dünyası degerli bir üyesini daha yitirdi. Meslektaşımız Türkan Başgöze

Rüya mı hakikat mi kalbim duracak sanki
Hayır bir rüya değil gerçeğin ta kendisi
Bu ne sessiz bir zafer ne şerefli mutluluk
Müjdeler olsun, müjde, çözüm bulundu işte!...

sözleriyle bizlere veda ederek sonsuz yolculuğuna çıktı. Başımız sağolsun.

1934 doğumlu olan Prof.Dr.Türkan Başgöze Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi matematik bölümünden 1957 yılında mezun oldu. Fakülte öğrenimi sırasında başarıları nedeniyle SCONY VACUM bursu ile ödüllendirildi. 1959 yılında ODTÜ'de asistanlığa başlayan Başgöze, 1962-1965 yılları arasında Londra Üniversitesi'nde doktora çalışmasını tamamlayarak ODTÜ'ye dönmüştür. 1968, 1973 ve 1981 yıllarında misafir öğretim üyesi olarak Kentucky Üniversitesi (ABD)'ni üç kez ziyaret etmış olan Başgöze 1971 yılında doçent ünvanını almıştır. 1987 yılında profesörlüğe yükseltilen Başgöze, A.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde görev almıştır.

Ölüm tarihi olan 22 Şubat 1991 gününe kadar Bölüm Başkanı ve Ana Bilim Dalı Başkanı olarak görevini sürdürmüştür.