1,2,3,∞ VEYA SÜRAT FELAKETTİR!

Tosun Terzioğlu

Limitlerle uğraştığımızda sonsuzla sık sık karşılaşmaya başlarız. Bildiğimiz sayılarla hesap yaparcasına sonsuzla hesap yapmaya kalkıştığımızda bir çok zorlukla karşılaşırız. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ifadesinin tanımını doğru dürüst kavramadan yola çıkarsak sonsuz "çok büyük" bir sayı gibi aklımızda yer alır. Örneğin 10^{10}. Ama bu sonsuz ise, bunun 1000 katı olan 10^{13} ne olmalı? Acaba şu "$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$" tanımını bir kez daha okusak mı? "Aman boşver" diyebilir içimizden bir ses. "Tanımlar bir sürü laf. Pek bir işe yaradıkları da yok. Zaman kaybı. Dedem bile asrımız sürat asrı der". Haydi biz bir probleme bakalım.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)=?$$

Kolaya benziyor. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4} = \infty$ ve $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$ bunları biliyoruz. Bir de limit teoremi vardı, hani

$$\lim(a_n - b_n) = a - b$$

diye yazılan. Sonuç $\infty - \infty$. Doğru sonsuz sayı değil, ama $a - a$ da sıfırdan başka ne olabilir ki? Yani

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

Bir de l'Hospital kuralıyla deneyelim bu problemi.

$$\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}=\frac{1-x^2}{x^4}$$

olduğuna göre, pay ve paydanın türevini alıp

$$-\frac{2x}{4x^3}=-\frac{1}{2x^2}$$

yazalım ve $x\to 0$ için limite bakalım. Bu sefer de

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

çıktı! Acaba bu limit yok mu?

Şu kolay probleme bir de şöyle bakalım. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$ ve $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4} = \infty$; doğru ama farkları, yani

$$\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}=\frac{1-x^2}{x^4}$$

x sıfıra yaklaştıkça nasıl davranıyor? Şimdi $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ise $2x^2 < 1$ olur. Demek ki, $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ için

$$\frac{1-x^2}{x^4} > \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

elde edilir. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$ olduğuna göre buradan da

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)=\infty$$

bulunur. Bu doğru yanıt. Bundan $\infty - \infty = \infty$ olduğunu söyleyemeyiz tabii. İlk olarak $1 - 1 = 2-2 = 3-3 = 0$, dolayısıyla $\infty - \infty = 0$ yanlışını yaptık. İkinci olarak da l'Hospital kuralını anlamadığımızı kanıtladık! $\lim_{x\to 0}(1 - x^2) = 1$ ve bu halde l'Hospital kuralını uygulayamayız.

Bir de şuna bakalım. Herhangi bir a için

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)=1$$

olur. $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ ve o halde

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)^x=1^\infty$$

bu da olsa olsa bire eşittir! İsterseniz bir hesap makinası bulalım, $a = 1$ olsun ve örneğin $(\frac{4}{3})^3, (\frac{5}{4})^4, (\frac{8}{7})^7$ değerlerini hesaplayalım. Pek bire yaklaşmıyoruz galiba! Oysa logaritma fonksiyonuna ara değer teoremini $[x, x+a]$ aralığında uygularsak ($a > 0$ aldık burada)

$$\frac{a}{x+a} < \ell n\left(\frac{x+a}{x}\right) < \frac{a}{x}$$

eşitsizliğini ve buradan da

$$\frac{ax}{x+a} < \ell n\left(\frac{x+a}{x}\right)^x < a$$

eşitsizliğini buluruz. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax}{x+a} = a$ olduğuna göre

$$\lim_{x\to\infty} \ell n\left(\frac{x+a}{x}\right)^x = a$$

ve bundan da

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x}\right)^x = e^a$$

sonucunu elde ederiz. Bu sonuç aslında herhangi bir a sayısı için doğrudur. Herhangi bir $b > 0$ sayısını $b = e^{\ell nb}$ olarak yazabiliriz. Dolayısıyla bu yolla herhangi bir pozitif sayıyı elde edebiliriz.

Son olarak da limit hesaplamalarında çokca duyduğumuz
"ŞİMDİ BU BELİRSİZLİĞİ BELİRLEYELİM" deyiminde nasıl dikkatli olmamız gerektiğini bir örnekle görelim

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(5+\sin x)}{x+5}$$

ifadesine bakacak olursak pay ve payda ∞ 'a gidiyor ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ortaya çıkıyor ama bu belirsizlik belirlenebilecek bir belirsizlik değil çünkü limit yok, yani belirsiz durumlarda limitin yokluğu da söz konusu.

Sonsuz bir sayı değildir. Matematik okurken tanımları çok iyi anlamadan ilerlersek, pek çok yanılgıya düşeriz. Aslında matematik okurken elimizin altında hep kalem kağıt olmalı. Okuduğumuz her cümleyi iyice anlamalı, bunu da gerektiğinde yazarak, hesap yaparak kontrol etmeliyiz. Teoremlerin varsayımlarıdır sonuca götüren. Bu varsayımları anlamalı ve teoremi elimizdeki probleme uygulamadan önce varsayımların gerçeklendiğini göstermeliyiz. Bu noktalara özen göstermezsek işte o zaman sürat felaket olur!

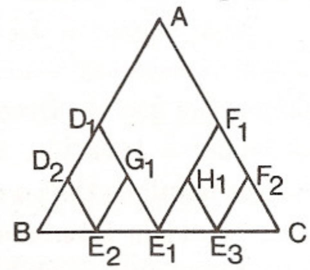
Eşkenar Üçgenler Üçgen Değil mi?

Nurettin Çalışkan

Kenarlarının uzunluğu a birim olan bir ABC eşkenar üçgeni alalım. D_1, E_1, F_1, sırasıyla AB, BC ve AC kenarlarının orta noktaları olsun. D_1, E_1 ve E_1, F_1 noktalarını birleştirerek elde edilen BD_1E_1 ve E_1F_1C üçgenleri, kenar uzunlukları $a/2$ olan eşkenar üçgenlerdir, dolayısıyla

$$|BD_1| + |D_1E_1| + |E_1F_1| + |F_1C| = 4\frac{a}{2} = 2a$$

olur. Aynı şekilde D_2, E_2, G_1, H_1, E_3 ve F_2 noktaları, sırasıyla $BD_1, BE_1, D_1E_1, E_1F_1, E_1C$ ve F_1C doğrularının orta noktaları olsun. Elde ettiğimiz BD_2E_2, $E_2G_1E_1$, $E_1H_1E_3$ ve E_3F_2C üçgenleri kenar uzunlukları $a/4$ olan eşkenar üçgenlerdir ve $|BD_2| + |D_2E_2| + |E_2G_1| + |G_1E_1| + |E_1H_1| + |H_1E_3| + |E_3F_2| + |F_2C| = 8\frac{a}{4} = 2a$ olur.



Böylece devam edecek olursak, her defasında, BC kenarına en yakın olarak elde edilecek kırık çizginin uzunluğu değişmeyecek, daima $2a$ olarak kalacaktır. Bu kırık çizginin BC kenarına istenildiği kadar yaklaştırılabileceği düşünülürse,

$$|BC| = 2a = |AC| + |AB|$$

sonucuna varılır.

Nerede hata yapılmıştır?