PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

- Çözümleri, Matematik Dünyası, İstanbul Bilgi Üniversitesi, Kuştepe Şişli İstanbul adresine 30 Ocak 2003 tarihine kadar gönderiniz.

Açıklama:

Bu sayımıza kadar bize yanıtlarını gönderenler içinde doğru çözüm üretenler: Oktay Balkış (Y.262)-Aksaray Anadolu Öğretmen Lisesi,Aksaray. Özel Selvergazi Fen Lisesi Matematik Olimpad grubu(Y.261 ,Y.262,Y.263, Y265). Kendilerini kutluyor ve armağan olarak bedava 2003 aboneliği veriyoruz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.271. A pozitif tam sayısının rakamları soldan sağa artan sırayla dizilmiştir. $9A$ sayısının basamakları toplamını bulunuz.

A.272. $ABCD$ paralelkenarının köşelerinin kesişim noktası O'dur. A, O ve B noktalarından geçen çember BC'ye teğettir. B, O ve C noktalarından geçen çemberin CD'ye teğet olduğunu kanıtlayınız.

A.273. 16 tane karta 1'den 16'ya kadar tam sayılar yazılmıştır. Herhangi iki komşu kart alındığında bunların üzerindeki sayıların toplamı tam kare olacak şekilde, bu kartlar sıralanabilir mi?

A.274. A şehrinden B şehrine bisikletli, aynı anda B'den A'ya motorsikletli çıktı. Bunlar saat 14:00'da karşılaştılar. Bisikletli 2 kat fazla hızla gitseydi saat 13:30'da karşılaşacaklardı. Motorsikletli 2 kat fazla hızla gitseydi 13:12'de karşılaşacaklardı. Bisikletli ve motorsikletli saat kaçta yola çıkmışlardı?

A.275. 100 tane gerçel sayının toplamı sıfırdır. İlk sayı ve her $k \geq 2$ için ilk k sayının toplamı negatif olmayacak şekilde bu sayıların sıralanabileceğini kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.271. Üçüncüden başlayarak tüm terimleri için $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{OBEB(a_{n-1},a_{n-2})}$ eşitliği sağlanan tüm sonsuz, sınırlı $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pozitif tam sayı dizilerini bulunuz.

Y.272. Düzlem üzerindeki 3 konveks çokgenin tek bir doğruyla kesilmemesi için gerek ve yeter koşul bu çokgenlerin her birinin diğer ikisinden bir doğruyla ayrılabilmesidir (yani öyle bir doğru bulunacak ki bu çokgen doğrunun bir tarafında, diğer iki çokgen de doğrunun diğer tarafında kalacak). Kanıtlayınız.

Y.273. Bir kare 9 tane yatay ve 9 tane de dikey doğruyla 100 tane dikdörtgene bölündü. Bu dikdörtgenlerden tam 9 tanesinin kare olduğu biliniyorsa bu karelerden en az ikisinin birbirine eşit olduğunu kanıtlayınız.

Y.274. (a_n) ve (b_n) gerçel sayı dizileri aşağıdaki şekilde tanımlanıyor. herhangi iki $a_0 > 0$ ve $b_0 > 0$ sayıları alınıyor. $x^2 + a_n x + b_n = 0$ denkleminin pozitif kökü a_{n+1}, negatif kökü de b_{n+1} olarak alınıyor. Bu dizilerin limitlerini bulunuz.

Y.275. 1'den 1000000'a kadar tüm tam sayılar beyaz veya siyah renge boyanmıştır. Her adımda bu sayılardan herhangi birisi alınıp, bu sayıyla aralarında asal olmayan tüm sayılarla birlikte karşıt renge boyanıyor. Başlangıçta tüm sayılar siyah ise bu işlemlerle tüm sayılar beyaz yapılabilir mi?

ÇÖZÜMLER

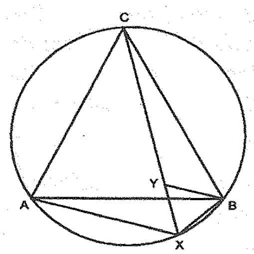
A.261. Tam m tane sıfırla biten bir faktoriyelin bulunduğu,fakat tam $m-1$ tane sıfırla biten faktoriyel bulunmadığı bilinir. Tam $m+1$ tane sıfırla biten bir faktoriyelin bulunur mu?

Çözüm. Tam m tane sıfırla biten en küçük faktoriyel $n!$ ise, n sayısı 5'e bölünüyor. n sayısı 25'e bölünmeseydi $(n-1)!$ tam $m-1$ tane sıfırla biterdi. Böylece n sayısı 25'e bölünür. O halde

$n+5$ sayısı 5'e bölünür, 25'e bölünmez, dolayısıyla $(n+5)!$ sayısı tam $m+1$ tane sıfırla biter.

A.262. Eşkenar ABC üçgeninin çevrel çemberinin (küçük) $\widehat{AB}$ yayı üzerinde bir X noktası alınmıştır, $|AX|+|BX|=|CX|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $|XY|=|XB|$ olmak üzere XC



Şekil 1

üzerinde Y noktası alalım (Şekil 1). $m(\widehat{CXB})=m(\widehat{CAB})=60°$ olduğundan XYB eşkenar üçgendir. $m(\widehat{YBC})=60°-m(\widehat{ABY})=m(\widehat{XBA})$ olduğundan YBC ve XBA üçgenleri eşittir. Dolayısıyla $|AX|+|XB|=|CY|+|YB|=|CY|+|YX|=|CX|$'dir.

A.263. $1gr, 2gr, ..., 19gr$ olan ağırlıkların 9'u gümüşten, 9'u bronzdan, biri de altından yapılmış. Bronzların toplam ağırlığı gümüşlerin toplam ağırlığından 90 gr daha fazla olduğuna göre altın olan ağırlık kaç gramdır?

Çözüm. Bronzların toplam ağırlığının gümüşlerin toplam ağırlığından $90gr$ daha fazla olması sadece aşağıdaki durumda olabilir: bronzlar $19gr, 18gr, ..., 11gr$'lık, gümüşler de $1gr, 2gr, ..., 9gr$'lık ağırlıklardır. O halde altın olan ağırlık $10gr$ olacak.

A.264. Herhangi 4 rakam verilmiştir. Bu sayıların, aşağıdaki eşitsilik sağlanacak şekilde, karelere yerleştirilebileceğini gösteriniz.

Çözüm. Rakamları $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$ şeklinde sıralayalım. O halde

$a_4+a_2-a_3-a_1=(a_4-a_3)+(a_2-a_1)\ge 0$ ve
$a_4+a_2-a_3-a_1 \le (a_4-a_3)+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)=a_4-a_1\le a_4\le 9$

olduğundan $0\le a_4+a_2-a_3-a_1\le 9$ eşitliğini elde ederiz.

A.265. Temel, basamakları toplamı ile toplandığında 2002'yi veren bir pozitif tam sayı bulduğunu İdris'e açıkladı. İdris de,basamakları toplamı ile farkını 2002'ye eşit olan bir pozitif tam sayı bulduğunu açıkladı. Temel, biraz düşündükten sonra böyle bir sayının bulunmadığını söyledi. Temel haklı mı? Temel'in sayısını bulunuz?

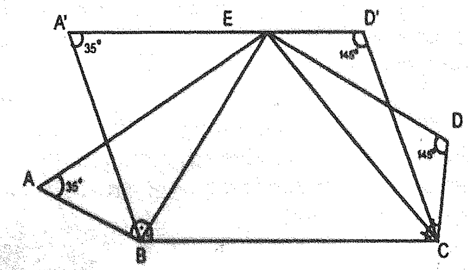
Çözüm. Bir sayı ile bu sayının basamakları toplamı 3'e bölündüğünde aynı kalan verdiğinden, bunların farkı 3'e bölünür. 2002 sayısı 3'e bölünmediğinden İdris'in söylediği koşulları sağlayan sayının bulunmamasına ilişkin Temel'in açıklaması doğrudur. Temel'in sayısının $19xy$ şeklinde olduğu açıktır. $1000+900+10x+y+1+9+x+y=2002$ denkleminden $11x+2y=92$ elde edilir. O halde x çift sayıdır, $2y\le 18$ olduğundan $x=8$, buradan da $y=2$ elde edilir. Böylece Temel'in sayısı 1982'dir.

Y.261. Küpleri toplamı 2002 olan iki tam sayı bulunur mu?

Çözüm. Bir tam sayının küpü 9'a bölündüğünde sadece 0,1,8 kalanları elde edilebilir. Dolayısıyla iki tam sayının küpleri toplamı 9'a bölündüğünde sadece 0,1,2,7 ve 8 kalanları elde edilebilir. $2002\equiv 4(mod 9)$ olduğundan, 2002 iki tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilemez.

Y.262. $ABCDE$ dışbükey beşgeninde BE ve CE köşegenleri sırasıyla $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{BCD}$ açılarının açıortaylarıdır. $s(\widehat{EAB})=35°$, $s(\widehat{CDE})=145°$ ve BCE üçgeninin alanı 11'dir. $ABCDE$ beşgeninin alanını bulunuz.

Çözüm. $[BE]$ doğru parçasının orta dikmesine



göre A noktasının simetriğini A' ile, $[CE]$'nin orta dikmesine göre D noktasının simetriğini de D' ile gösterelim. $m(\widehat{A'EB})=m(\widehat{ABE})=$

$m(\widehat{EBC})$ olduğundan $A'E \| BC$'dir. Benzer şekilde $ED' \| BC$'dir. Dolayısıyla A', E, D' noktaları doğrusaldır ve $A'D' \| BC$'dir. $m(\widehat{BA'D'}) + m(\widehat{CD'A'}) = m(\widehat{BAE}) + m(\widehat{CDE}) = 35° + 145° = 180°$ olduğundan $BCD'A'$ dörtgeni paralelkenardır. O halde $Alan(ABCDE) = Alan(ABE) + Alan(BEC) + Alan(ECD) = Alan(A'BE) + Alan(BEC) + Alan(ECD') = Alan(A'BCD') = 2Alan(BEC) = 22$ elde edilir.

Y.263. 1'den 121'e kadar olan pozitif tam sayılar, 11×11 boyutlu tabloyu aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde yazılabilir mi:

a) aralarındaki fark 1'e eşit olan sayılar komşu (ortak kenarları bulunan) karelere yazılacak;

b) tüm tam kareler aynı sütunda bulunacak?

Çözüm. Sayıların, koşullar sağlanacak şekilde yazılabileceğini varsayalım. Tam karelerin bulunduğu sütun birinci ve sonuncu sütun olamaz, çünkü bu sayıların 1 eksik ve 1 fazlalarının sayısı 20'dir. O halde bu sütunu sildiğimizde tablo iki gruba bölünecek. İki ardışık sayının kareleri arasındaki tüm sayılar aynı grupta bulunacak. Diğer taraftan m^2-1 ve m^2+1 sayıları farklı gruplarda bulunacak. Dolayısıyla 1^2 ile 2^2 arasındaki sayılar 1. grupta ise, 2^2 ile 3^2 arasındaki sayılar 2. grupta bulunacak, 3^2 ile 4^2 arasındaki sayılar 1. grupta bulunacak v.s. 10^2 ile 11^2 arasındaki sayılar 2. grupta bulunacak. m^2 ile $(m+1)^2$ arasında $2m$ tane sayı bulunduğundan, 1. grupta $2+6+10+14+18 = 50$ sayı bulunacak. 50 sayısı 11'e bölünmediğinden çelişki elde edilir. Böylece sayıalr, koşullar sağlanacak şekilde yazılamaz.

Y.264. a, b pozitif tam sayıları için $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > 0$ sağlanıyorsa, $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > \frac{1}{4ab}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow 5b^2 \geq a^2 + 1 = a^2 + 2a\frac{1}{4a} + \frac{1}{2} > a^2 + 2a\frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2} = (a + \frac{1}{4a})^2 \Rightarrow 5 > (\frac{a}{b} + \frac{1}{4ab})^2 \Rightarrow \sqrt{5} - \frac{a}{b} > \frac{1}{4ab}$

Y.265. Her iki komşu sayıdan büyüğü küçüğüne bölündüğünde bir asal sayı elde edilecek şekilde, çember boyunca birbirinden farklı 2003 tane pozitif tam sayı yazılabilir mi?

Çözüm. $a_1, a_2, ..., a_{2003}$ sayılarının koşulu sağladığını varsayalım. a_n sayısı asal çarpanlara ayrıldığında elde edilen asal bölenlerin sayısını p_n ile gösterelim ($n = 1, 2, ..., 2003$). Örneğin $a_n = 18$ ise, $p_n = 3$'tür. İki komşu sayıdaki asal bölen sayısı arasındaki fark 1 olduğundan $p(n)$ ve $p(n+1)$ sayılarından biri tek ise, diğeri çifttir ve tersine. O halde $p(1)$ tek (çift) ise, $p(3), p(5), ..., p(2003)$ sayıları da tektir(çifttir). Diğer taraftan a_1 ile a_{2003} komşu olduğundan a_{2003}'ün çift (tek) olması gerekir. Çelişki!

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası, İstanbul Bilgi Üniversitesi, Kuştepe Şişli İstanbul

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *matematikdunyasi@math.bilgi.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.