GEOMETRİK OPTİMALLEŞTİRME PROBLEMLERİ ÜZERİNE II

Gabil Adilov-Ramazan Tınaztepe
gabil@pascal.sci.akdeniz.edu.tr-rtinaztepe@yahoo.com
Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, ANTALYA

---

3. BAZI EŞİTSİZLİKLER VE OPTİMALLEŞTİRME PROBLEMİNDE ROLÜ: Birçok optimalleştirme problemleri belli eşitsizlikler yardımıyla daha kolay çözülebilir. Meşhur eşitsizliklerden birkaç tanesini hatırlatalım. $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ pozitif reel sayıları için;

Aritmetik ortalama $A(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}$

Geometrik ortalama $G(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 ... x_n}$

Harmonik ortalama $H(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$

olarak tanımlanır. Bu ortalamalar arasında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$A(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \geq G(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \geq H(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \qquad (1)$$

Burada eşitlik durumu ancak $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$ durumunda olur. Yukarıdaki eşitsizliklerin daha genel bir halini verelim. Bunun için $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ pozitif reel sayılar olmak üzere k dereceden ortalama fonksiyonunu tanımlayalım:

$M_k(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_2^k+x_3^k+...+x_n^k}{n}}$

Bu fonksiyonda $k = 1$, için

$M_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = A(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ ve $k = -1$ seçilirse $M_{-1}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = H(x_1, x_2, x_3, .$ olacağı açıktır. Bununla birlikte aşağıdaki eşitlikler de kolayca gösterilebilir:

$M_o(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \lim\limits_{k\to 0} M_k(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = G(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$;

$M_\infty(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \lim\limits_{k\to \infty} M_k(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \max\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$;

$M_{-\infty}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \lim\limits_{k\to -\infty} M_k(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \min\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$.

Yukarıda tanımlanan M_k fonksiyonu k parametresine göre monoton artan bir fonksiyondur. Dolyısıyla $k > l$ olduğunda

$$M_k(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \geq M_l(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \qquad (2)$$

olur ve eşitlik ancak $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$ durumunda olabilir. Görüldüğü gibi (2) eşitsizliği (3) eşitsizliğinin özel halidir.

Cauchy-Schwartz Eşitsizliği: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in R$ ve $y_1, y_2, y_3, ..., y_n \in R$ için

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır ve eşitlik sadece $x_i = \lambda y_i$ $(i = \overline{1, n})$ olması durumunda geçerlidir. Bu eşitsizlikler yardımıyla çözülebilecek optimalleştirme problemlerine örnekler verelim.

Örnek 1: $x > 0, y > 0, z > 0$ olmak üzere $\frac{x^3y^2z}{x^6+y^6+z^6}$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: x ve y'yi $x = \sqrt[6]{3}t$, $y = \sqrt[6]{2}s$ şeklinde değiştirelim. Bu durumda $\frac{x^3y^2z}{x^6+y^6+z^6} = \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}t^3s^2z}{3t^6+2s^6+z^6} = \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{t^{18}s^{12}z^6}}{3t^6+2s^6+z^6}$ olur. Sonuncu terime Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğini uygularsak; $\frac{x^3y^2z}{x^6+y^6+z^6}$ $\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{6}$ buluruz. Burada eşitlik durumu $s = t = z$ durumunda vardır. Dolayısıyla, değişkenler $x = \sqrt[6]{3}\lambda$, $y = \sqrt[6]{2}\lambda$, $z = \lambda$ değerinde iken , verilen ifade maksimum olan $\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{6}$ değerine ulaşır (burada λ pozitif reel sayı değerli bir parametredir).

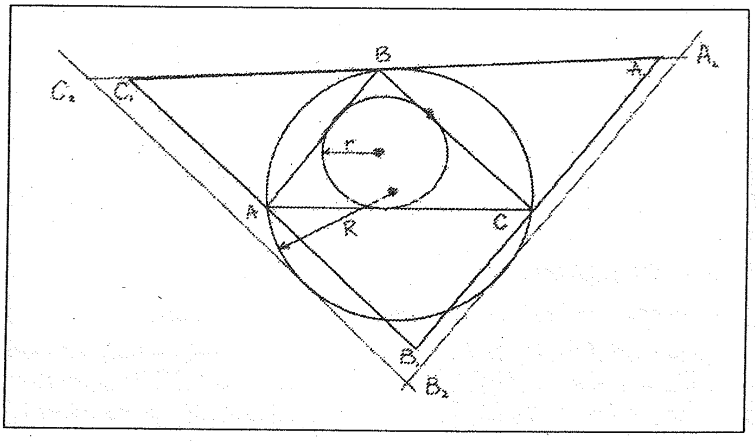
Örnek 2: a,b,c verilmiş reel sayılar olmak üzere $x^2+y^2+z^2 \leq 100$ yuvarında $ax+by+cz$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden: $ax+by+cz \leq 10\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ olur. Eşitlik durumu: $x=\lambda a$, $y=\lambda b$, $z=\lambda c \Rightarrow \lambda = \frac{10}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Böylece $x=\frac{10a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $y=\frac{10b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $z=\frac{10c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ve $max(ax+by+cz) = 10\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ bulunur. Özel halde $a=1, b=4, c=8$ olursa, $x=\frac{10}{9}, y=\frac{40}{9}, z=\frac{80}{9}$ ve $max(x+4y+8z)=90$ olur.

Geometrik optimalleştirme problemlerinin incelenmesinde bu anlamda yararlı olabilecek birkaç önemli geometrik eşitsizliği verelim. Bu eşitsizlikler üçgenler ve dörtyüzlülerle ilgilidir. Bununla birlikte, birçok eşitsizliği konveks çokgenler ve çokyüzlüler için de uygun biçimde genelleştirmek mümkündür.

Önce, kullanılacak işaretlemeleri gösterelim. Bir ABC üçgeninde A,B,C bu üçgenin köşelerini; a,b,c kenarlarını, h_a,h_b,h_c yüksekliklerini, m_a,m_b,m_c kenarortaylarını, l_a,l_b,l_c açıortaylarını, R çevrel çemberin yarıçapını, r iç teğet çemberin yarıçapını, R_a,R_b,R_c sırasıyla üçgen içindeki bir noktadan A,B,C köşelerine olan uzaklığı, d_a,d_b,d_c sırasıyla üçgen içindeki bir noktadan a,b,c kenarlarına olan uzaklığı, S üçgenin alanını, $2p$ üçgenin çevresini göstersin.

Eşitsizlik 1. Her üçgen için $R \geq 2r$ eşitsizliği sağlanır ve eşitlik durumu sadece eşkenar üçgenler için geçerlidir.



Şekil 4

Kanıt: ABC üçgeninin iç teğet ve çevrel çemberlerini çizelim. Köşe noktalarından geçip, karşı kenara paralel olan $A_1B_1C_1$ üçgeni ABC üçgenine benzer olur: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ ve $2|AB| = |A_1B_1|$; $2|AC| = |A_1C_1|$; $2|BC| = |B_1C_1|$

Kenarları çevrel çembere teğet olup, $A_1B_1C_1$ üçgeninin kenarlarına paralel olan $A_2B_2C_2$ üçgeni de ABC'ye benzer olur: $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$ ve $|A_2B_2| \geq |A_1B_1|$; $|A_2C_2| \geq |A_1C_1|$; $|B_2C_2| \geq |B_1C_1|$. Küçük çember ABC üçgenine iç teğet, büyük çember $A_2B_2C_2$ üçgenine iç teğet $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$ ve $|A_2B_2| \geq |A_1B_1| = 2|AB|$ olduğundan $R \geq 2r$ olur.

Eşitlik durumu: $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$ olduğunda olur. Başka bir deyişle ABC üçgeninin çevrel çemberi $A_1B_1C_1$ üçgenine iç teğet olduğunda olur. Kolayca görülür ki, bu durumda ΔABC eşkenar üçgendir.

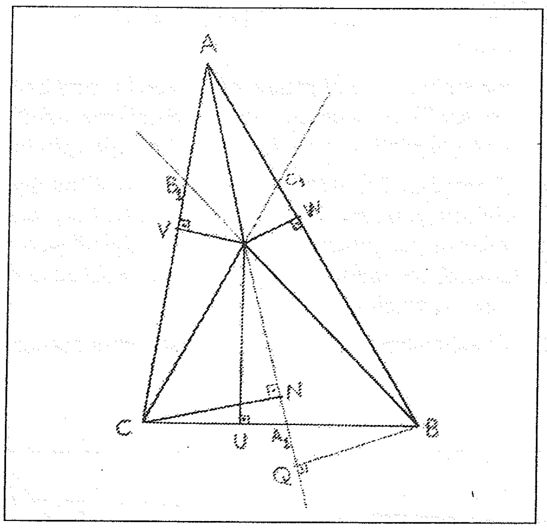
Eşitsizlik 2. Verilmiş bir ABC üçgeninin içindeki her M noktası için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

(a) $R_aR_bR_c \geq 8d_ad_bd_c$;

(b) $R_a+R_b+R_c \geq 2(d_a+d_b+d_c)$;

(c) $\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c})$.

Yukarıdaki ifadelerde eşitlik durumu ancak eşkenar üçgenler ve M merkez nokta kabul edildiğinde ortaya çıkar.



Şekil 5

Kanıt: a) ŞEKİL 5 $BQ \perp AM$ ve $CN \perp AM$ dir. Kolayca görüldüğü gibi $|BC| = |BA_1| + |A_1C| \geq |BQ| + |NC|$. Dolayısıyla,

$aR_a = |BC|.|AM| \geq (|BQ| + |CN|).|AM| = 2S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC} = cd_c + bd_b$ olur.

Benzer şekilde $bR_b \geq ad_a + cd_c$ ve $cR_c \geq ad_a + bd_b$ olduğu gösterilebilir.

Üç eşitsizliği art arda çarpsak; $aR_a bR_b cR_c \geq (cd_c + bd_b)(ad_a + cd_c)(ad_a + bd_b)$ elde edilir. Diğer yandan $cd_c + bd_b - 2\sqrt{cd_c.bd_b} = (\sqrt{cd_c} - \sqrt{bd_b})^2 \geq 0 \Rightarrow cd_c + bd_b \geq 2\sqrt{cd_c.bd_b}$ olur. Benzer şekilde $ad_a + cd_c \geq 2\sqrt{ad_a.cd_c}$ ve $ad_a + bd_b \geq 2\sqrt{ad_a.bd_b}$. Sonuçta $aR_a bR_b cR_c \geq 8abcd_a d_b d_c$ bulunur , dolayısıyla $R_a R_b R_c \geq 8d_a d_b d_c$ olur.

Eşitlik durumu: $|BC| = |BA_1| + |A_1C| = |BQ| + |CN| \Leftrightarrow BC \perp AM$ olmalı; benzer şekilde $BM \perp AC$; $CM \perp AB \Leftrightarrow M$ noktası yüksekliklerin kesişim noktasıdır (ortamerkez). Diğer yandan $ad_a = bd_b = cd_c \Leftrightarrow S_{\Delta AMB} = S_{\Delta MAC} = S_{\Delta MBC} \Leftrightarrow M$ noktası kenarortayların kesişim noktası olmalıdır. Buna göre ABC üçgeni eşkenar, M ise merkez noktasıdır.

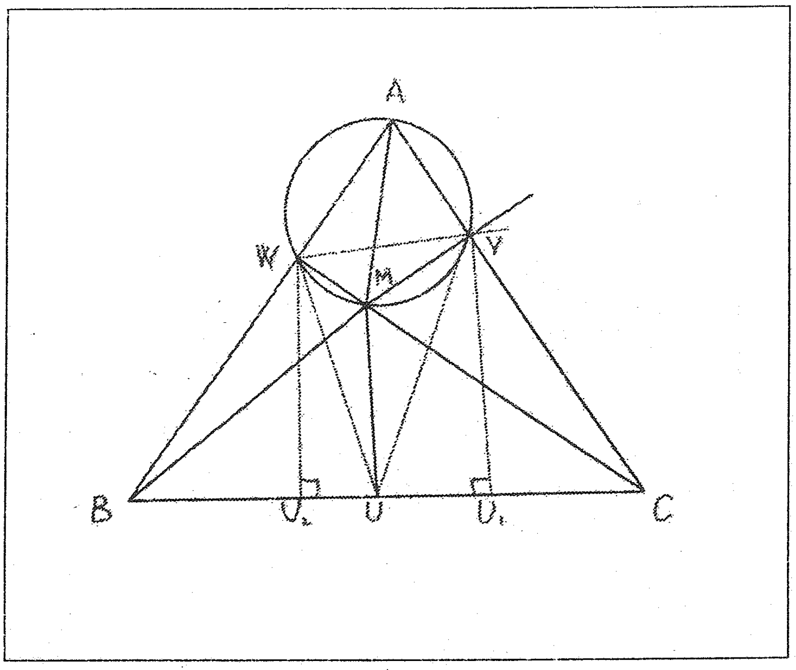
b) Şekil 6 A, W, M, V noktalarından geçen bir çember çizelim. ($MV \perp AC$ ve $MW \perp AB$ olduğundan bu çember çizilebilir.) Bu çemberin yarıçapı $R_a/2$ olur. Sinüs teoreminden $VW = R_a \sin A$ olur. U_1U_2 parçası VW'nin BC üzerinde izdüşümüdür: $prVW = prd_b + prd_c$. Bu ise $U_1U_2 = d_b \sin C + d_c \sin B$'dır, buradan $R_a \sin A \geq d_b \sin C + d_c \sin B \Leftrightarrow R_a \geq d_b \frac{\sin C}{\sin A} + d_c \frac{\sin B}{\sin A}$ olur. Benzer şekilde:

$R_b \geq d_a \frac{\sin C}{\sin B} + d_c \frac{\sin A}{\sin B}$

$R_c \geq d_a \frac{\sin B}{\sin C} + d_b \frac{\sin A}{\sin C}$

Bu üç eşitsizliği art arda toplarsak ve her $a > 0$ için $a + \frac{1}{a} \geq 2$ olduğuna dikkat edersek (burada eşitlik durumu $a = \frac{1}{a} = 1$ dir) : $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$

Eşitlik durumu: İlk önce $\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B} = 2$ olmalıdır. Bu durumda $\sin B = \sin C$ olur, böylece $B = C$ bulunur. Benzer şekilde $A = B$'dir, dolayısıyla üçgen eşkenar olmalıdır. Diğer yandan; $VW = U_1U_2$ olmalıdır. Bu durumda $WV \parallel BC$, olur. Benzer şekilde $UW \parallel AC$ ve $UV \parallel AB$ olur.



Şekil 6

Dolayısıyla VW, UW, UV üçgenin orta dikmesi olup M eşkenar üçgenin merkez noktasıdır.

c) Şekil 7 A', B', C' ve U', V', W' noktaları sırasıyla MU, MV, MW ve MA, MB, MC doğruları üzerinde olup, aşağıdaki koşulları sağlayan noktalardır: $R'_a = MA' = \frac{1}{MU} = \frac{1}{d_a}$; $R'_b = MB' = \frac{1}{MV} = \frac{1}{d_b}$; $R'_c = MC' = \frac{1}{MW} = \frac{1}{d_c}$; $d'_a = MU' = \frac{1}{MA} = \frac{1}{R_a}$; $d'_b = MV' = \frac{1}{MB} = \frac{1}{R_b}$; $d'_c = MW' = \frac{1}{MC} = \frac{1}{R_c}$
Kolayca gösterilebilir ki, U', V', W' noktaları $A'B'C'$ üçgeni üzerinde olup ve $MU' \perp C'B'$, $MV' \perp C'A'$, $MW' \perp A'B'$. Örneğin, MVA ve $MU'B'$ üçgenleri ortak M açısına sahip olup, kenarları orantılıdır: $|MV| : |MA| = d_b : R_a = \frac{1}{R'b} : \frac{1}{d'a} = d'_a : R'_b = MV' : MB'$.

Bu durumda $\Delta MU'B' \sim \Delta MVA$, dolayısıyla $\angle MU'B' = \angle MVA = 90°$ olur.

Şimdi de ABC üçgenine Eşitsizlik 2(b)'yi uygularsak $R'_a + R'_b + R'_c = 2(d'_a + d'_b + d'_c) \Rightarrow \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c})$ elde edilir.

Eşitlik durumu, önceki eşitsizlikte olduğu gibi ABC üçgeni eşkenar ve M merkez nokta olunca olur.

Not 2. Bu eşitsizlikleri aritmetik , geometrik ve harmonik ortalama cinsinden şöyle ifade edebiliriz:

(a) $G(R_a, R_b, R_c) \geq 2G(d_a, d_b, d_c)$;

(b) $A(R_a, R_b, R_c) \geq 2A(d_a, d_b, d_c)$;

(c) $H(R_a, R_b, R_c) \geq 2H(d_a, d_b, d_c)$.

Not 3. Yukarıdaki eşitsizlikleri A. Florian daha genel haliyle ispat etmiştir;

(i) $|k| \leq 1$ iken $M_k(R_a, R_b, R_c) \geq 2M_k(d_a, d_b, d_c)$

(ii) $|k| \geq 1$ iken $M_k(R_a, R_b, R_c) \geq 2^{\frac{1}{|k|}} M_k(d_a, d_b, d_c)$

Geometride bu konuyla ilgili olan ilginç eşitsizlikler yukarıda saydıklarımızla sınırlı değildir, aşağıda bu tür eşitsizlikler veriyor, fakat ispatlarını okuyucularımıza alıştırma olarak bırakıyoruz.