1· 8+1=9, 12·8+2=98,......,123456789·8+9 =987654321

Engin Mermut
Dokuz Eylül Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Kaynaklar Yerleşkesi, 35160, Buca/İZMİR
engin.mermut@deu.edu.tr

Başlığımızdaki eşitlikler şunlar:

$$\begin{aligned}
1\cdot 8+1 &= 9,\\
12\cdot 8+2 &= 98,\\
123\cdot 8+3 &= 987,\\
1234\cdot 8+4 &= 9876,\\
12345\cdot 8+5 &= 98765,\\
123456\cdot 8+6 &= 987654,\\
1234567\cdot 8+7 &= 9876543,\\
12345678\cdot 8+8 &= 98765432,\\
123456789\cdot 8+9 &= 987654321.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikleri bir arkadaş iletmişti bana[1]; ilk olarak kim bulmuş bilmiyorum. Neden diye soruyor insan tabii ki? Bu eşitlikleri kolayca doğrulayabilirsiniz, ama hepsini aynı anda ve hatta daha fazlasını kanıtlamak daha matematiksel olmaz mı? Böylece bu eşitliklerin niye doğru olduğunu daha iyi anlamış olmaz mıyız?

Önce şu geometrik toplamı hatırlayalım: n pozitif bir tamsayı ise,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}, \quad \text{her } x \neq 1 \text{ reel sayısı için.} \tag{1}$$

Her iki tarafın x'e göre türevini alırsak,

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{-nx^{n-1}(1-x)-(1-x^n)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x^n)-nx^{n-1}(1-x)}{(1-x)^2}$$

elde ederiz. Şimdi de her iki tarafı x ile çarpalım:

$$\sum_{k=0}^{n-1} kx^k = \frac{x(1-x^n)-nx^n(1-x)}{(1-x)^2}, \quad x \neq 1. \tag{2}$$

Başlığımızdaki eşitlikleri $n = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$ için şu şekilde yazabiliriz (ondalık açılımlarını düşünerek):

$$n + 8\cdot \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)10^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}(9-k)10^{n-1-k} \tag{3}$$

---

[1] Özlem Ege, DEÜ Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü.

Bu eşitlik doğrudur ancak ve ancak

$$\begin{aligned} n+\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{[8(k+1)-(9-k)]}_{9k-1}10^{n-1-k} &= 0 \Leftrightarrow \\ n+9\cdot 10^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}k(10^{-1})^k-10^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(10^{-1})^k &= 0 \qquad (4)\end{aligned}$$

Şimdi $x=\frac{1}{10}=10^{-1}$ olsun. O halde, $10=\frac{1}{x}$ ve $9=10-1=\frac{1-x}{x}$ olur. Bu durumda göstermek istediğimiz (4) eşitliği $x=10^{-1}$ cinsinden şu olur:

$$n+\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}kx^k-\frac{1}{x^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}x^k=0 \qquad (5)$$

(1) ve (2) eşitliklerini kullanarak (5) eşitliğinin $x=10^{-1}\neq 1,0$ olduğundan şu eşitliklere denk olduğunu görürüz:

$$\begin{aligned} n+\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\cdot\frac{x(1-x^n)-nx^n(1-x)}{(1-x)^2}-\frac{1}{x^{n-1}}\cdot\frac{1-x^n}{1-x} &= 0\\ \Leftrightarrow n+\frac{(1-x^n)-nx^{n-1}(1-x)}{x^{n-1}(1-x)}-\frac{1-x^n}{x^{n-1}(1-x)} &= 0\\ \Leftrightarrow nx^{n-1}(1-x)+(1-x^n)-nx^{n-1}(1-x)-(1-x^n)=0\Leftrightarrow 0 &= 0\end{aligned}$$

Yani (5), dolayısıyla (4) ve (3) eşitlikleri doğrudur, üstelik her pozitif n tamsayısı için, sadece $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ için değil! Örneğin, $n=10,11,12$ için de (3) eşitliği bize şu eşitlikleri verir:

$$\begin{aligned} 10+8\cdot(1234567890+10) &= 9876543210\\ 11+8\cdot(12345678900+100+11) &= 98765432100-1\\ 12+8\cdot(123456789000+1000+110+12) &= 987654321000-10-2\end{aligned}$$

Başlığımızdaki eşitlikler, (3) eşitliğinin $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ için özel hali, ama aslında (3) eşitliği de her $x\neq 1,0$ reel sayısı için doğru olan (5) eşitliğinde $x=10^{-1}$ alınarak elde edilen (4) eşitliğinden geliyor. Uzun lafın kısası, kimi cebirsel eşitlikler, bazı özel sayılarda eğlenceli eşitlikler verebiliyormuş!

Tabii kendimizi 10'luk düzene mahkum etmek zorunda değiliz. R. Alizade'nin[2] başlıktaki eşitliklere ilk tepkisi herhangi bir düzende de doğru mu diye sormak olmuştu. Yazının başında vurguladığımız gibi matematikte neden bir önermenin doğru olduğunu daha iyi anlamaya çalışıyoruz, yani sonucu doğru yapan tam olarak hangi hipotezlerdir. b, 1'den büyük bir tamsayı olsun. b-düzenindeki rakamları artan sırada, $A_0, A_1, \ldots, A_{b-1}$ sembolleri ile gösterelim. 8 rakamı onluk düzende sonuncu rakamdan bir önceki rakamdı. Bu durumda başlığımızdaki eşitlikleri b-düzeninde şöyle yorumlayabiliriz: $n\leq b-1$ pozitif tamsayısı için,

$$(A_1A_2\cdots A_n)_b\cdot(A_{b-2})_b+n=(A_{b-1}A_{b-2}\cdots A_{b-n})_b$$

[2]İYTE Fen Fakültesi Matematik Bölümü.

Bunun kanıtını da onluk düzendekine benzer şekilde (5) eşitliğinde $x = b^{-1}$ alarak elde edebileceğimizi göstermeyi okura bırakıyoruz. Böylece başlığımızdaki eşitliklerde niye 8 ile çarptığımız daha bir açıklığa kavuştu. Örneğin $b = 16$ için, 16'lık düzendeki rakamları artan sırada $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$ sembolleri ile gösterirsek, şu eşitliği yazabiliriz:

$$(E)_{16} \cdot (123456789AB)_{16} + (B)_{16} = (FEDCBA98765)_{16}.$$

$b = 8$'lik düzende, rakamları artan sırada $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ile gösterirsek de örneğin şu eşitliği yazabiliriz:

$$(6)_8 \cdot (12345)_8 + (5)_8 = (76543)_8.$$

Bütün bu eşitlikleri elde etmemizi sağlayan en önemli sonucumuz $\sum_{k=0}^{n-1} kx^k$ toplamını (2) eşitliğinde verilen şekilde bulmuş olmamızdı. Bu toplamı, türev kullanmadan, perturbasyon metodu[3] ile de elde edebiliriz. Bu metot başka toplam formüllerini elde etmekte de kullanılabileceği için bu yolla nasıl elde edildiğini de gösterelim. $x \neq 1$ bir reel sayı olsun. Her n pozitif tamsayısı için aradığımız $\sum_{k=0}^{n} kx^k$ toplamını S_n ile gösterelim ve $S_{n+1} = S_n + (n+1)x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} kx^k$ toplamının ilk terimini ayırarak kalan kısmı S_n cinsinden ifade etmeye çalışalım; böylece S_n için çözebileceğimiz bir denklem bulacağız:

$$\begin{aligned}
S_n + (n+1)x^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} kx^k = \underbrace{0 \cdot x^0}_{\text{ilk terim}} + \sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^{k+1} \\
&= x \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} kx^k}_{=S_n} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} x^{k+1}}_{=\frac{x - x^{n+2}}{1-x}} \text{(geometrik seri toplamı)} \\
\Rightarrow S_n + (n+1)x^{n+1} &= xS_n + \frac{x - x^{n+2}}{1-x}.
\end{aligned}$$

Bu denklemi S_n için çözerek, $S_n = \sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ elde ederiz (ki bu bize S_{n-1} için (2) eşitliğini verir).

Toplamlarla oynamaya meraklı okur için integral hesaplarında yaptığımız kimi işlemlerin uygun bir biçimde sonlu toplamlarda benzerlerinin yapılabileceğini[4] ve bu şekilde

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \left[k \cdot \frac{x^k}{x-1} - \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^{k+1}}{x-1} \right] \Bigg|_{k=0}^{n+1} = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

ifadesinin kolayca elde edilebileceğini belirterek yazımızı noktalayalım.

---

[3]Bakınız *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, R. L. Graham, D. E. Knuth & O. Patashnik, 1994, Addison-Weley, sayfa 32-33, 43-44.

[4]Bakınız *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, R. L. Graham, D. E. Knuth & O. Patashnik, 1994, Addison-Weley, sayfa 47-56.