ZAMAN SKALASINDA TEMEL ANALİZ

Ahmet Yantır

İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR e-posta: ayantir@likya.iyte.edu.tr

---

1990' lı yılların en gözde çalışmaları Zaman Skalası üzerinde yapılan çalışmalardır. İlk kez 1988 yılında Stefan Hilger' in doktora tezinde tanıtılan Zaman Skalası en genel anlamıyla sürekli ve ayrık olan analizin birleştirilmesidir. Zaman Skalası üzerinde yapılan çalışmaların büyük bir kısmı adi diferansiyel denklemler ve dinamik sistemler üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu çalışmada zaman skalasında türevin nasıl tanımlandığı ve bu yeni tanıma göre türevin özelliklerinin nasıl şekillendigini ispat ve örneklerle açıklamaya çalışacağız.

T reel sayıların herhangi bir kapalı alt kümesi olsun. T' yi zaman skalası olarak adlandıracagız. Reel sayılar

$$d(x,y) = |x-y| \qquad \forall x,y \in R$$

metriğine göre tam uzay olduğundan ve T kapalı olduğundan T kümesi de aynı metriğe göre tam uzaydir.

İleriye Sıçrama Operatörü:

$\forall t \in T$; $t \leq maxT$; olmak üzere σ' yı

$$\sigma(t) = Inf\{s : s \in T, s > t\}$$

Şeklinde ifade edelim. Bu durumda öyle $s_n \in T$ vardır ki $s_n \to \sigma(t)$. T kümesi kapalı olduğundan $\sigma(t) \in T$.

Tanım: $\sigma : T \to T$ operatörüne ileriye sıçrama operatörü denir.

T=R durumunda $\sigma(t) = t$, T=Z durumunda ise $\sigma(t) = t+1$' dir.

Ayrıca $\sigma(MaxT) = MaxT$ şeklinde tanımlanır.

Tanım: Eğer $\sigma(t) = t$ ise t' ye sağ yoğun nokta, $\sigma(t) > t$ ise t' ye sağ yayılmış nokta denir.

Geriye Sıçrama Operatörü:

$\forall t \in T$; $t \leq maxT$; olmak üzere ρ' yu

$$\rho(t) = Sup\{s : s \in T, s < t\}$$

Şeklinde ifade edelim. Bu durumda öyle $s_n \in T$ vardır ki $s_n \to \rho(t)$. T kümesi kapalı olduğundan $\rho(t) \in T$.

Tanım: $\rho : T \to T$ operatörüne geriye sıçrama operatörü denir.

T=R durumunda $\rho(t) = t$, T=Z durumunda ise $\rho(t) = t-1$' dir.

Ayrıca $\sigma(MinT) = MinT$ şeklinde tanımlanır.

Tanım: Eğer $\rho(t) = t$ ise t' ye sol yoğun nokta, $\rho(t) < t$ ise t' ye sol yayılmış nokta denir.

Bu tanımlara göre akla şu iki soru gelebilir:

1) Hangi $t \in T$ için $\rho(\sigma(t)) = t$' dir ?

a) Eğer t sağ yayılmış ise ve **b)** Eğer t sağ ve sol yoğun ise

2) Hangi $t \in T$ için $\sigma(\rho(t)) = t$' dir ?

a) Eğer t sol yayılmış ise ve **b)** Eğer t sağ ve sol yoğun ise

Tanım: $$T^k = \begin{cases} T - \{MaxT\} &, \ maxT < \infty \quad ve \quad \sigma(MaxT) > MaxT \\ T &, \qquad\qquad diğer \quad durumda \end{cases}$$

$$T_k = \begin{cases} T - \{MinT\} & , \quad MinT < -\infty \quad ve \quad \rho(MinxT) < MinT \\ T & , \quad diğer \quad durumda \end{cases}$$

T^k' ya Δ-türevlenebilirlik bölgesi, T_k' ya ∇ -türevlenebilirlik bölgesi denir.

Zaman Skalasında Türev

Tanım: $f : T \to C$ bir fonksiyon, $t \in T^k$ ve $a \in C$ olsun. Eğer

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - a[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|, \forall s \in U_t$$

olacak şekilde t' nin bir U_t komşuluğu varsa f fonksiyona t noktasında Δ-türevlenebilir bir fonksiyon, a' ya f fonksiyonunun t noktasındaki Δ-türevi denir ve $a = f^\Delta(t)$ ile gösterilir.

$$a = f^\Delta(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

Örnekler:

1) $T = R$ olsun. O halde $f^\Delta(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t)-s}$

$$= \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t-s} = f'(t)$$

2) $T = Z$ olsun.O halde $f^\Delta(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t)-s}$

$$= \lim_{s\to t} \frac{f(t+1) - f(s)}{t+1-s}$$
$$= f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

3) T keyfi bir uzay,$f : T \to C$ bir fonksiyon ve $f(t) = \alpha$, $\forall t \in T$ olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t)-s}$$
$$= \lim_{s\to t} \frac{\alpha - \alpha}{\sigma(t)-s} = 0$$

O halde sabit bir fonksiyonun türevi 0' dır.

4) T keyfi bir uzay,$f : T \to C$ bir fonksiyon ve $f(t) = t$, $\forall t \in T$ olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t)-s}$$
$$= \lim_{s\to t} \frac{\sigma(t) - s}{\sigma(t)-s} = 1$$

5) T keyfi bir uzay,$f : T \to C$ bir fonksiyon ve $f(t) = t^2$, $\forall t \in T$ olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t)-s}$$
$$= \lim_{s\to t} \frac{(\sigma(t))^2 - s^2}{\sigma(t)-s}$$
$$= \lim_{s\to t} \frac{(\sigma(t) - s)(\sigma(t) + s)}{\sigma(t)-s} = \sigma(t) + t$$

6) $T = N_0^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{n} : n \in N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}\}$ ve $f(t) = t^2$ olsun.

$t = \sqrt{n} \Rightarrow n = t^2$

$\sigma(t) = \sigma(\sqrt{n}) = n + 1 = \sqrt{t^2+1}$' dir. O halde $(t^2)^\Delta = t + \sqrt{t^2+1}$

7)$T = \{\frac{n}{2} : n \in N_0\}$ ve $f(t) = t^2$ olsun.

$t = \frac{n}{2} \Rightarrow n = 2t$

$\sigma t = \sigma\frac{n}{2} = \frac{n+1}{2} = t + \frac{1}{2}$' dir. O halde $(t^2)^\Delta = 2t + \frac{1}{2}$.

8) $T = N_0^{\frac{1}{3}} = \{\sqrt[3]{n} : n \in N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}\}$ ve $f(t) = t^2$ olsun.

$t = \sqrt[3]{n} \Rightarrow n = t^3$

$\sigma(t) = \sigma(\sqrt[3]{n}) = \sqrt[3]{n+1} = \sqrt[3]{t^3+1}$' dir. o halde $(t^2)^\Delta = t + \sqrt[3]{t^3+1}$' dir.

9) T keyfi bir uzay, $f : T \to C$ bir fonksiyon ve $f(t) = \sqrt{t}$, $\forall t \in T$ olsun.

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \lim_{s\to t} \tfrac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s} \\ &= \lim_{s\to t} \tfrac{\sqrt{\sigma(t)}-\sqrt{s}}{\sigma(t)-s} \\ &= \lim_{s\to t} \tfrac{\sqrt{\sigma(t)}-\sqrt{s}}{(\sigma(t)-\sqrt{s})(\sigma(t)+\sqrt{s})} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{\sigma(t)}+\sqrt{t}} \end{aligned}$$

t=MaxT Halinde Δ Türevin Anlamı

Δ türevi $T^k = T - \{MaxT\}$ üzerinde tanımladık. Burada şu soru sorulabilir: "Acaba $t = MaxT$ noktasında Δ türev için ne söylenebilir? "

$|f(\sigma(t)) - f(s) - a[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t) - s| \qquad ;\forall s \in U_t$

$t = MaxT \Rightarrow U_t$ t' nin küçük komşuluğu yalnız t noktasını içerir. O halde yukarıdaki eşitsizlikte s yerine yalnızca t konabilir. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlik

$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(t) - a[\sigma(t) - t]| \leq \epsilon|\sigma(t) - t|$

$\Rightarrow |f(t) - f(t) - a[t - t]| \leq \epsilon|t - t|$

$\Rightarrow 0 \leq 0$

halini alır ki; bu da a' nın her değeri için sağlanır. O halde türev tek türlü belirlenemez.

Önerme: $t_0 \neq MinT, \sigma(t_0) > t_0$ ve $\rho(t_0) = t_0$. Bu durumda $\sigma(t)$ fonksiyonu $t = t_0$ noktasında Δ türeve sahip değildir.

İspat: $a = f^\Delta(t_0) = \sigma^\Delta(t_0)$ olduğunu kabul edelim.

$\Rightarrow |\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - a[\sigma(t_0) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t_0) - s| \qquad ;\forall s \in U_t$

i)$t_0 \in U_0$ olduğundan $s = t_0$ seçilebilir.

$|\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - a[\sigma(t_0) - t_0]| \leq \epsilon|\sigma(t_0) - t_0| \qquad ;\forall s \in U_{t_0}$

her ϵ değeri için geçerli olduğundan $\epsilon \to 0$ için limit

$\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0) - a[\sigma(t_0) - t_0] = 0$ olur. Yani;

$$a = \frac{\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0}$$

dır.

ii) t_0 sağ yayılmış ve sol yoğun olduğundan $s \in U_{t_0}$ noktaları t_0 noktasının solundan seçilebilir ve s' ye yeterince yakın t_0 lar için $s \to t_0 \Rightarrow \sigma(s) \to t_0$.

$|\sigma(\sigma(t_0)) - t_0 - a[\sigma(t_0) - t_0]| \leq \epsilon|\sigma(t_0) - t_0|$

her ϵ değeri için geçerli olduğundan $\epsilon \to 0$ için limit

$\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0) - a[\sigma(t_0) - t_0] = 0$ olur. Yani;

$$a = \frac{\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0}$$

dir.

(i) ve (ii) den $\sigma(t_0) = t_0$. Bu bir çelişkidir. Bu durumda kabulümüz yanlıştır. O halde $\sigma(t)$, t_0 noktasında Δ türevlenemez.

Önerme: $f : T \to C$ fonksiyonu T^k da Δ türevlenebilir bir fonksiyon ve $t \in T^k$ olsun. Bu durumda $a = f^\Delta(t)$ tektir.

İspat : $a_1 = f^\Delta(t)$ ve $a_2 = f^\Delta(t)$ olduğunu kabul edelim.

$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(s) - a_1[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|$;$\forall s \in U_t^1$, $\forall \epsilon > 0$

$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(s) - a_2[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|$;$\forall s \in U_t^2$, $\forall \epsilon > 0$.

$U_t = U_t^1 \bigcap U_t^2$ olsun. Bu durumda her iki eşitsizlik de sağlanacaktır.

$\Rightarrow |\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s} - a_1| \leq \epsilon$;$\forall s \in U_t^1$, $s \neq \sigma(t)$

$\Rightarrow |\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s} - a_2| \leq \epsilon$;$\forall s \in U_t^2$, $s \neq \sigma(t)$

$\Rightarrow \forall s \in U_t$; $|a_1 - a_2| = |a_1 - a_2 - \frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s} + \frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}|$

$\Rightarrow |a_1 - a_2| \leq |\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s} - a_1| + |\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s} - a_2|$

$\Rightarrow |a_1 - a_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$

$\Rightarrow a_1 - a_2 = 0$ $a_1 = a_2$

Teorem: $f : T \to C$ bir fonksiyon ve $t \in T^k$ olsun.

1) f fonksiyonu $t \in T^k$ noktasında Δ türevlenebilir ise t noktasında süreklidir.

2) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sağ yayılmış ise f fonksiyonu t' de Δ türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}.$$

3) Eğer t sağ yayılmış ise f' nin t' de Δ türevlenebilir olması gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

değerinin sonlu olmasıdır. Bu durumda ;

$$f^\Delta(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

4) Eğer $f(t)$ t noktasında Δ türevlenebilir ise;

$$f(\sigma(t)) = f(t) + f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - t].$$

Hatırlatma: "Z Üzerinde Süreklilik"

E bir metrik uzay ve $x_o \in E$ olsun. Eğer verilen $\epsilon > 0$ değeri için

$\forall x \in U_\delta(x_0) = x \in E : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

olacak şekilde öyle $\delta = \delta(\epsilon, x_o)$ değeri bulunabiliyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

$d(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|$ $\forall t_1, t_2 \in T$

$T = Z$ olsun. $t_0 \in Z$, $\forall \delta > 0$, $U_\delta(t_0) = \{t \in Z : |t - t_0| < \delta\} = \{t_0\}$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$

$\Rightarrow$ Z üzerinde tanımlanan tüm fonksiyonlar süreklidir.

İspat:

1) f' nin t noktasında Δ türevi olduğundan, verilen $\epsilon > 0$ değeri için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - s]| \leq \epsilon \cdot |\sigma(t) - s| \qquad \forall s \in U_t$$

olacak şekilde U_t komşulugu vardır.

$|f(t)-f(s)| = |f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s] - (f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]) + f^{\Delta}(t)\cdot(t-s)|$

$\leq |f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]| + |f(\sigma(t)) - f(t) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-t]| + |f^{\Delta}(t)(t-s)|$

$\leq \epsilon\cdot|\sigma(t)-s| + \epsilon\cdot|\sigma(t)-t| + |f^{\Delta}(t)|\cdot|t-s|$

$\leq 2\cdot\epsilon\cdot|\sigma(t)-t| + |f^{\Delta}(t)| + \epsilon = \epsilon_1, \qquad \epsilon_1 > 0$

$\Rightarrow$ f fonksiyonu t noktasında süreklidir.

2) $\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s} = \frac{f(\sigma(t))-f(t)+f(t)-f(s)}{\sigma(t)-s}$

$\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s} = lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-s} + lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{\sigma(t)-s}$

$\Rightarrow f^{\Delta}(t) = lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-s}$

3) ($\Rightarrow$) f' nin t noktasında Δ türevi olsun.

$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]| \leq \epsilon\cdot|\sigma(t)-s|$

$\Rightarrow f^{\Delta}(t) = lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}$

t noktası sağ yoğun olduğundan;

$lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s} = lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f^{\Delta}(t)$

($\Leftarrow$) Aşikardır.

4) Let $\sigma(t) = t$

$f(\sigma(t)) = f(t) + f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-t] \quad \Rightarrow f(t) = f(t)$

Let $\sigma(t) = t$.

$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t} \quad \Rightarrow f(\sigma(t)) = f(t) + f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-t]$.

Teorem: $f, g : T \to C$ fonksiyonlar ve $t \in T^k$ olsun. Eğer f ve g t noktasında Δ türevlenebilir ise;

1) f+g fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir ve;

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

2) $k \in C$ olmak üzere kf fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir ve;

$$(kf)^{\Delta}(t) = k\cdot f^{\Delta}(t)$$

3) $f\cdot g$ de t noktasında Δ türevlenebilirdir ve;

$$(f\cdot g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)\cdot g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\cdot g(\sigma(t))$$

4)Eğer $g(t)\cdot g(\sigma(t) \neq 0))$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da t noktasında Δ türevlenebilirdir ve;

$$(\frac{f}{g})^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t)}$$

1 ve 2 nolu ifadelerin ispatı reel analizdeki gibidir.

İspat :

3) Durum 1) t noktası sağ yayılmış olsun.

$(fg)^{\Delta}(t) = \frac{(fg)(\sigma(t))-(fg)(t)}{\sigma(t)-t} = \frac{f(\sigma(t))g(\sigma(t))-f(t)g(\sigma(t))+f(t)g(\sigma(t))-f(t)g(t)}{\sigma(t)-t}$

$= \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t} g(\sigma(t)) + f(t) \frac{g(\sigma(t))-g(t)}{\sigma(t)-t} = f^{\Delta}(t) g(\sigma(t) + f(t) g^{\Delta}(t)$

Durum 2) t noktası sağ yoğun olsun.

$(fg)^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{(fg)(t)-(fg)(s)}{t-s} = lim_{s \to t} \frac{f(t)g(t)-f(t)g(s)+f(t)g(s)-f(s)g(s)}{t-s}$

$= \lim_{s \to t} \frac{g(t)-g(s)}{t-s} f^{\Delta}(t) + \lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} g^{\Delta}(t)$

$= g^{\Delta}(t) f(t) + f^{\Delta}(t) g(t)$

$= f^{\Delta}(t) g(\sigma(t)) + f(t) g^{\Delta}(t)$

4 nolu ifadenin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

KAYNAKÇA :

1)Hussein Husseinov: Zaman skalasında Dinamik Sistemler ders notları, İzmir 2000

2)Martin Bohner, Allan Peterson: Dynamic Equations on Time Scales, Boston 2001