PUTNAM YARIŞMASI ÜZERİNE

Ruşen Kaya

Çukurova Üniversitesi, Matematik Bölümü, Adana

Kalkülus (bir çok üniversitede "Analiz" adı altında okutulan ders) kuşkusuz matematiğin temel taşlarından biridir ve bir çok bilim dalı ona çok sıklıkla başvurur. Bazı sözlüklerde kimi zaman "diferansiyel ve integral hesabı" olarak tanımlanır. Kalkülus'ü zevkli kılan özelliği ise ilginç problemleri ve bu problemlerin günlük yaşamla örtüşmesidir.

Aslında kalkülus ile ilgili bir çok problem bulmak mümkündür. Ama en zevkli problemler : uç noktalara hitap eden, ayrıntılı bilgi ve ince düşünebilme yetisi gerektiren problemlerdir. Bu yazımızda böyle problemlerden bazılarını inceleyerek, kalkülusun eğlenceli dünyasında ufak bir gezinti yapacağız. Fakat bunu yaparken sorulardan bazılarının dış görünüş itibariyle pek karmaşık olduğunu; ama onları rahatça çözebilmek için işlemsel hız faktörünün ne kadar önemli olduğunu ve sonuç olarak basit algoritmalardan sonra nasıl kolaylaştığını göreceğiz. Yani çözeceğimiz problemler kalkülusun kuramsal yönünden çok onun işlemsel güzelliğini ve işlemlerden sonra varılan sonucun sadeliği hakkında olacaktır.

Bütün bunları yaparken bir yarışmayla tanışacağız : Putnam yarışmaları. Çözeceğimiz sorular bu yarışmada farklı yıllarda sorulmuş olan kalkülus problemleri. Ancak ileride bahsedeceğimiz gibi bu yarışma sadece kalkülus üzerine değil aynı zamanda tüm lisans seviyesindeki matematik bilgisini de kapsıyan bir yarışma. Biz yarışmanın kalkülus ile ilgili olan tarafına bakacağız. Böylelikle yazımız anlamlı olacak, aksi halde tüm konularla ilgili problemleri çözmeye ne sabır yeter ne de zaman!) Böylece (her ne kadar yarışmanın kalkülus ile ilgili özel kısmını inceliyor olsak da) Putnam yarışmaları hakkında genel bir bilgi sahibi olma olanağına erişerek, böyle bir yarışmanın düzenlenmesine öncülük etmiş olan William Lowell Putnam'ı da anmış olacağız.

Elbette, bu yarışmada farklı yıllarda sorulmuş pek çok kalkülus problemi var. Nitekim böyle soruların tamamını bu yazı da çözmeyeceğiz. Çözeceğimiz problemlerin bazıları çözülmesi çok zormuş gibi gözüken ve bazı teknikler gerektiren problemler, bazıları sabır ve işlem hızı gerektiren; ancak sonuç itibariyle mükemmel bir sadeliğe sahip olan problemler, bazıları da pek ilginç olarak nitelenemeyecek olan kalkülus problemleri. Böylelikle Putnam yarışmalarında ilginç problemlerin yeralmasının yanı sıra, ilginç olmayanlarının da farklı yıllarda sorulduğunu göreceğiz. Özellikle kalkülüsün integral hesabına dayalı , çözülürken kişiye zevk veren problemlerle karşılaşacağız.

Yarışmanın Kısa Bir Tanımı

Sınav, kişilerin orjinal fikirlerini ve bilgi birikimlerini ölçmek üzere hazırlanıyor. Yarışmacılardan beklenen, temel kuramları kullanmak ve üniversite düzeyindeki matematik bilgilerini dışa vurmaktır. Yarışma, özellikle matematik ana bilim dalında alışılmışın dışında, oldukça ince noktalara hitap eden matematiksel kavramlardan oluşmakta ve yarışmacıları bu dalda eğitmek ve teşvik etmek üzere tasarlanmıştır. Yarışmacının matematik bilimine, matematik klüplerinde veya derslerde tartışılan "matematiğin esaslarını inceleme" ve benzeri gibi başlıklardaki temel fikirle yaklaşmasını sağlamayı amaçlıyor. Grup teorisinin temel kavramları, kümeler kuramı, sayılar kuramı ve kardinal aritmetik gibi bilgileri gerektirebilecek, yarışmacıların kendi öz güvenleriyle çözebileceği soruların öğrencilere çok da yabancı gelmemesi umulmaktadır.

Ödüller:

William Lowell Putnam Ödülleri Ödüller, kazanan beş takımın bağlı oldukları kurumların matematik bölümlerine verilir. Ayrıca takımların her bir üyesi de ödüllendirilir. En yüksek derece alan beş kişi Amerikan Matematik Derneği tarafından Putnam üyeleri olarak seçilir. Ödüller bu kişilerle birlikte en yüksek derece yapan sonraki yirmi kişiye de verilir.

Ayrıca her yıl resmi olarak William Lowell Putnam burs ödülleri Harvard Üniversitesi'nde ya da Radcliffe Koleji'nde verilir.

Elizabet Lowell Putnam Ödülleri:

Bu ödül, periyodik olarak yarışmada göstereceği performansı övülmeye değer olan özel bayanlara veriliyor. Bu ödül, bayan yarışmacının başka yarışmalarda tekrar başarılı olması durumunda diğer ödüllerine ekleniyor. Ancak bu ödül sadece bayan yarışmacılar için olup, yarışmacıların önceden cinsiyetlerini belirtmeleri gerekiyor.

Geçmiş Yıllara Ait Bazı Problemler

Aşağıdaki problemler, yanlarında belirtilen tarihlerde Putnam yarışmalarında sorulmuş olan problemlerden bazılarıdır.

1980

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}dx =?$$

Çözüm: Bilinen integrasyon teknikleriyle bu problemi çözmeye çalışırsanız kendinizi büyük bir çıkmazın içerisinde hissedersiniz. Bu problem böyle özel bir yarışmada sorulduğuna göre, işin içinde bir numara olmalı ! $f(x) = \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$ için,

$$f(\frac{\pi}{2}-x) = \frac{1}{1+(\cot x)^{\sqrt{2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{(\tan x)^{\sqrt{2}}}} = \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} = \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}+1-1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} - \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} = 1-f(x).$$

Şimdi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx ...(*)$$

olarak yazalım ve $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ integralini irdeleyelim : $\frac{\pi}{2}-x=u$ olsun. Bu durumda, $-dx=du$ ve integral.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} f(\frac{\pi}{2}-u)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\frac{\pi}{2}-u)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-f(u))du$$

olarak bulunur. Bu sonucu (*) eşitliğinde kullanarak :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-f(u))du$$

bulunur. Bu son eşitlikte $u=x$ alındığında,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-f(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f(x)+1-f(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1dx = x|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

1987

$$I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx=?$$

Çözüm:

Bu integral ilk bakışta korkunç gözüküyor. Alışılmış yöntemleri kullanmak sonuç vermiyor, bu durumda farklı bir yöntemi deniyelim:

$9-y=x+3$ veya $9-x=y+3$ olsun; $-dy=dx$ olur. Ayrıca $x=2\Longrightarrow y=4$, $x=4\Longrightarrow y=2$ dir. Elde ettiğimiz bu verilerle integralin değişkenlerini değiştirelim :

$$I=\int_4^2\frac{\sqrt{\ln(y+3)}}{\sqrt{\ln(y+3)}+\sqrt{\ln(9-y)}}(-dy)=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(y+3)}}{\sqrt{\ln(y+3)}+\sqrt{\ln(9-y)}}dy$$

elde ederiz; ama bu son integralde $y=x$ değişken değiştirildiğinde,

$$I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}dx$$

olur. Bu integral ile integralin ilk hali toplandığında:

$$I+I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx+\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}dx.$$

$\Longrightarrow 2I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx=\int_2^4 1dx=2$

olur; fakat $2I=2\Longrightarrow I=1$ sonucuna ulaşırız.

Kalkülüste önemli bir yere sahip olan maksimum-minimum problemlerinden birine bakalım :

1998

$$f(x)=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}}$$

$x>0$ için f'in minimum değerini hesap ediniz.

Çözüm: Fonksiyonun görünümü hiç de iç açıcı değil, bu haliyle minimumunu bulmak, bir hayli karmaşık işlemlerin içinde bocalamamıza neden olacak gibi. Fakat f'i kısaltmak mümkün gibi. Bu özelliği parantezli ifadeleri açarak görebiliriz:

$$f(x)=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}}=\frac{x^6+6x^4+15x^2+20+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}+x^3+\frac{1}{x^3}}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{6x^4+15x^2+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+18}{2x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}=\frac{6x^8+15x^6+15x^2+6+18x^4}{x^4}\cdot\frac{x^3}{2x^6+3x^4+3x^2+2}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{3(2x^6+3x^4+3x^2+2)+3x^2(2x^6+3x^4+3x^2+2)}{x(2x^6+3x^4+3x^2+2)}=\frac{3+3x^2}{x}=3(x+\frac{1}{x}).$$

$\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)=3(1-\frac{1}{x^2})$ olduğunadan, $x=1$ ve $x=-1$ apsisli noktalar kritik noktalardır. $f''(1)>0$, $f''(-1)<0$ olduğundan f foksiyonu ,$(1,6)$ noktasında **yerel** minimuma, $(-1,-6)$ noktasında ise **yerel** maksimuma erişir. Dahası $x\in(0,1)$ için $f'(x)<0$ ve $x\in(1,\infty)$ için $f'(x)>0$ olduğundan f, $x>0$ için $(1,6)$ noktasında mutlak minimuma erişir. O halde $f(x)$'in $x>0$ için minimum değeri 6 dır.

1984

$f(x)=x^3-3x$ fonksiyonunun $x^4+36\leq 13x^2$ kümesi üzerinde maksimum değerini bulunuz.

Çözüm: Bu soru Putnam yarışmalarındaki ilginç olmayan problemler kategorisinde değerlendirileb:

$$x^4-13x^2+36\leq 0\Longrightarrow (x^2-9)(x^2-4)\leq 0\Longrightarrow (x-3)(x+3)(x-2)(x+2)\leq 0$$

Bu eşitsizliğin çözüm kümesi : $S=[-3,-2]\cup[2,3]$ bulunur. Ötee yandan $f'(x)=3x^2-3$ olup; $f'(-1)=f'(1)=0$, olduğundan $x=-1$ ve $x=1$ apsisli noktalar kritik noktalardır; ancak $1\notin S$ ve $-1\notin S$ olduğundan $x=-1,1$ apsisli noktalarda maksimum aramak anlamsızdır. $[-3,-2]$ ve $[2,3]$ aralıkları için, $x=-3,-2,2,3$ apsisli noktalar kritik noktalardır. Ancak $f(-3)=-18, f(-2)=-2, f(2)=2, f(3)=18$ olduğundan f , S üzerinde maksimuma $(3,18)$ noktasında erişir. Dolayısıyla f nin S üzerindeki maksimum değeri 18 dir.

Yarışmanın Kısa Bir Tarihçesi

Yarışma ilk 1938'de Amerika ve Kanada üniversitelerindeki matematik çalışmalarında verimli rekabeti teşvik etmek üzere yapıldı. Mr. William Lowell Putnam, kolejlerdeki düzenli çalışmalarda organize olmuş olan takım yarışmalarının yararlı olacağı konusunda çok büyük bir inanca sahipti. 1882 yılı Harvard sınıfının bir üyesi olan Mr. Putnam, içerisinde üniversitelerarası entellektüel yarışmaların önemine değindiği bir makalesini "Harvard Mezunları " (Harvard Graduates' Magazine) adlı derginin 1921'deki Aralık sayısında yayımladı . Bir yarışma düzenlemek üzere Mr.Putnam'ın eşi Elizabeth Lowell Putnam 1927'de yeni bir maddi kaynak yarattı . İngiliz sahalarında ilk yarışma bu kaynak ile desteklendi ve birkaç yıl sonra ikinci bir yarışma matematik dalında iki kurum arasında gerçekleştirildi. Bu yarışma sadece 1935'de Mr.Putnam'ın ölümüne kadar değildi öyle ki; sınav onun bıraktığı bir miras olarak kabul edildi ve Amerikan Matematikçiler Derneğini bu mirasa hala sahip çıkıyor.

Acaba ülkemizde bu formatta bir yarışma var mı? Dilerim Türk Matematik Derneği böyle bir misyonu zaman içinde üstlenir...

Faydalanılan web siteleri :

1. http://math.scu.edu/putnam
2. http://www-scf.usc.edu/ nmahesh/competitions.html