PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

- Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 30 Kasım 2002 tarihine kadar gönderiniz.

Açıklama:

Bu sayımıza kadar bize yanıtlarını gönderenler içinde doğru çözüm üretenler: Oktay Balkis (Y.256 ve Y.257),Aksaray Anadolu Öğretmen Lisesi,Aksaray. Mustafa Dönmez ve Yaşar Dönmez(Y.256 ,Y.257),Halil Kale Fen Lisesi,Turgutlu Manisa ve Turgutlu Lisesi, Turgutlu-Manisa.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.266. 3698765432123456789 ve 345678909876543 sayılarının çarpımı kaç basamaklıdır?

A.267. Merkezi $\overset{\triangle}{ABC}$ ikizkenar ($|AB| = |BC|$) üçgeninin $[AC]$ kenarı üzerinde bulunan çember $[AB]$ ve $[BC]$ kenarlarına teğettir, $|AC|$ kenarını da üç parçaya bölüyor. $[BH]$, ABC üçgeninin yüksekliği olmak üzere, $|BH| \cdot |AC| = 18\sqrt{2}$ ise, çemberin yarıçapını bulunuz.

A.268. -7'den 7'ye kadar olan tüm tam sayılar, her sayının iki komşusunun çarpımı negatif olmayacak şekilde, çember boyunca dizilebilir mi?

A.269. $[|x|]$, x gerçel sayısının tam değerini, $\{x\} = x - [|x|]$ de kesir değerini göstermek üzere, $[|x|] \cdot \{x\} \geq 3$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif gerçel x sayısını bulunuz.

A.270. a, b, c gerçel sayıları

$$max(a,b)+max(c,2002) = min(a,c)+min(b,2003)$$

eşitsizliğini sağlar. $b \geq c$ olduğunu kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.266. n sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısını $\tau(n)$ ile gösterelim. $\tau(n^2+1)$ dizisinin hiçbir n sayısından başlayarak kesin artan olmayacağını kanıtlayınız.

Y.267. $ABCD$ paralelkenarının köşegenlerinin kesişim noktası O olsun. $\overset{\triangle}{ABO}$ üçgeninin çevrel çemberi $[AD]$ kenarı ile bir E noktasında, $\overset{\triangle}{DOE}$ üçgeninin çevrel çemberi de $[BE]$ doğru parçasını bir F noktasında kesiyor. $s(\widehat{BCA}) = s(\widehat{FCD})$ olduğunu gösteriniz.

Y.268. 10 tane kağıt parçasının her birinde bir kaç tane 2'nin kuvvetlerine eşit olan sayı yazılmıştır. Tüm kağıt parçalarındaki sayıların toplamı aynıdır. Yazılan tüm sayılar arasında en az 6 kez rastlanan bir sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

Y.269. a, b, c gerçel sayıları $9a + 11b + 29c = 0$ eşitliğini sağlamaktadır. $ax^3 + bx + c = 0$ denkleminin $[0,2]$ aralığında en az bir kökü bulunduğunu kanıtlayınız.

Y.270. Aşağıdaki iddialardan ikisinin doğru, birinin de yanlış olduğu biliniyorsa, n pozitif tam sayısını bulunuz:

1) $n + 51$, bir tam sayının karesidir;

2) n sayısının son basamağı 1'dir;

3) $n - 58$, bir tam sayının karesidir.

ÇÖZÜMLER

A.256. 2000^{2003} sayısı birkaç tane ardışık tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilir mi?

Çözüm. $1^3 + 2^3 + ... + n^3$ toplamını s_n ile gösterelim. s_n'in 7 modunda alabileceği değerleri hesaplayalım.

$s_1 \equiv 1(mod7)$; $s_2 \equiv 1^3 + 2^3 \equiv 2(mod7)$;

$s_3 \equiv 2 + 3^3 \equiv 1(mod7)$; $s_4 \equiv 1 + 4^3 \equiv 2(mod7)$;

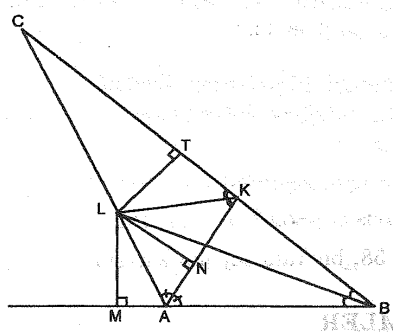
$s_5 \equiv 2 + 5^3 \equiv 1(mod7)$; $s_6 \equiv 1 + 6^3 \equiv 0(mod7)$;

$$s_7 \equiv 0(mod7)$$

olduğundan her $n > 7$ için de $s_n \equiv s_{n-7}(mod7)$ olacak. Dolayısıyla s_n'in 7 modunda alabileceği değerler sadece 0, 1, 2'dir. O halde $(n+1)$'den m'ye kadar olan sayıların küpleri toplamı: $s_m - s_n$ farkı 7 modunda sadece 0, 1, 2, -1, -2 değerleri alabilir. Diğer taraftan $5^6 \equiv 1 (mod 7)$ olduğundan $2000^{2003} \equiv (5^6)^{333} \cdot 5^5 \equiv 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5 \equiv 3 (mod 7)$'dir. Dolayısıyla 2000^{2003}, ardışık sayıların küplerinin toplamı şeklinde gösterilemez.

A.257. $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninde $[BL]$ ve $[AK]$ açıortayları çizilmiştir. $[KL]$ de $\overset{\triangle}{AKC}$ üçgeninin açıortayı ise, $\widehat{BAC}$ açısını bulunuz.

Çözüm. L noktasından BA, AK ve BC doğrularına, sırasıyla LM, LN ve LT dikmelerini çizelim (şekil 1). BL açıortay olduğundan $|LM| = |LT|$'dir. KL, $\widehat{AKC}$ açısının açıortayı olduğundan $|LT| = |LN|$'dir. O halde $\overset{\triangle}{LMA}$ ve $\overset{\triangle}{LNA}$ üçgenleri eşittir. Dolayısıyla, $s(\widehat{MAL}) = s(\widehat{LAN}) = s(\widehat{KAB}) = \frac{180°}{3} = 60°$, buradan da $s(\widehat{BAC}) = 120°$'dir.



Şekil 1.

A.258. Okuldaki 15 sınıftan toplam 100 kişi alındı. En az iki sınıftan aynı sayıda öğrenci alınmış olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Tüm sınıflardan farklı sayıda öğrenci alınmış olduğunu varsayalım ve sınıfları alınan öğrenci sayısına göre sıralayalım: k. sınıftan a_k öğrenci alınmıştır: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{15}$. O halde $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 2$, ...,$a_{15} \geq 14$ olduğundan $a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} \geq 1 + 2 + \ldots + 14 = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105 > 100$ elde ederiz. Çelişki!

A.259. x pozitif gerçel sayı olmak üzere $\frac{x^3}{8} + \frac{6}{x}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm. Aritmetik ve Geometrik Ortalama arasındaki eşitsizliği kullanalım:

$$\frac{x^3}{8} + \frac{6}{x} = \frac{x^3}{8} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{8} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x}} = 4$$

$x = 2$ alındığında ($\frac{x^3}{8} = \frac{2}{x}$ denkleminin çözümü) 4 değeri elde ediliyor.

A.260. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dizisinde $a_1 = 2002, a_2 = 2001$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ise, a_{2002}'yi bulunuz.

Çözüm. $a_3 = \frac{a_2}{a_1}$; $a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{a_1}$; $a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{a_2}$; $a_6 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_1}{a_2}$; $a_7 = \frac{a_6}{a_5} = a_1$; $a_8 = \frac{a_7}{a_6} = a_2$ olduğundan her $n = 1, 2, \ldots$ için $a_{n+6} = a_n$ elde edilir. O halde $a_{2002} = a_{1996} = \ldots = a_4 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2002}$'dir.

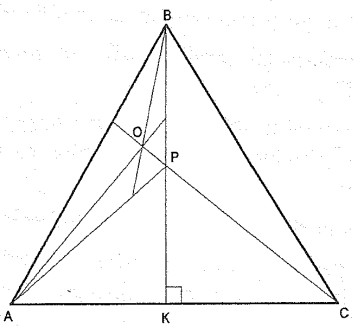
Y.256. $4(a+b+c) = ab+bc+ca$ eşitliğini sağlayan tüm a, b, c pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm. $4(a + b + c) = ab + bc + ca \Leftrightarrow ab - 2a + bc - 2b + ca - 2c - 2a + 4 - 2b + 4 - 2c + 4 = 12 \Leftrightarrow a(b-2) + b(c-2) + c(a-2) - 2(a-2) - 2(b-2) - 2(c-2) = 12 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) + (b-2)(c-2) + (c-2)(a-2) = 12$. Denklem a, b, c'ye göre simetrik olduğundan $a \leq b \leq c$ koşulunu sağlayan çözümleri bulup, diğer çözümleri bunların permutasyonları olarak elde edebiliriz. $5 \leq a \leq b \leq c$ olursa, $(a-2)(b-2)+(b-2)(c-2)+(c-2)(a-2) \geq 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 27 > 12$ olduğundan $a \leq 4$'tür. $a = 1$ ise, $-(b-2)+(b-2)(c-2)-(c-2) = 12 \Leftrightarrow (b-2)(c-3) - (c-3) = 13 \Leftrightarrow (b-3)(c-3) = 13 \Leftrightarrow b = 4$; $c = 16$ elde edilir. $a = 2$ ise, $(b-2)(c-2) = 12$, buradan da ya $b = 3$, $c = 14$; ya $b = 4$, $c = 8$, ya da $b = 5$, $c = 6$ elde edilir. $a = 3$ ise, benzer şekilde $(b-1)(c-1) = 13$ elde edilir. Bu denklemi sağlayan $c \geq b \geq a = 3$ üçlüsü bulunmuyor. $a = 4$ ise, $bc = 16$, buradan da $b = c = 4$ elde edilir. Böylece tüm çözümler, $(1, 4, 16)$; $(2, 3, 14)$; $(2, 4, 8)$; $(2, 5, 6)$; $(4, 4, 4)$ üçlüleri ve bunların permütasyonlarıdır (toplam 25 tane çözüm).

Y.257. $\overset{\triangle}{ABC}$ ikizkenar üçgeninde ($|AB| = |BC|$), $s(\widehat{ABC}) = 80°$ dir ve $s(\widehat{OAC}) = 40°$, $s(\widehat{OCA}) = 30°$ olmak üzere üçgenin içerisinde bir O noktası alınmıştır. $s(\widehat{BOC})$'yi bulunuz.

Çözüm. $[BK]$ yüksekliğinin OC ile kesişim noktasını P ile gösterelim (Şekil 2). O halde

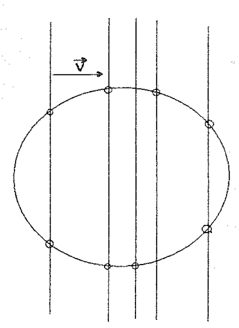
$s(\widehat{PAC}) = s(\widehat{PCA}) = 30°$'dir, dolayısıyla, $s(\widehat{PAB}) = 50° - 30° = 20°$'dir, böylece AO, $\widehat{BAP}$ açısının açıortayıdır. $s(\widehat{OPA}) = 180° - s(\widehat{APC}) = 60°$ ve $s(\widehat{APB}) = 180° - (s(\widehat{ABP}) + s(\widehat{BAP})) = 180° - (40° + 20°) = 120°$ olduğundan PO, $\widehat{APB}$ açısının açıortayıdır. Böylece O, $\overset{\triangle}{APB}$ üçgeninin açıortaylarının kesişim noktasıdır. O halde $s(\widehat{BOP}) = 180° - (20° + 60°) = 100°$'dir.



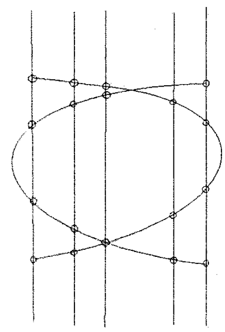
Şekil 2.

Y.258. Dışbükey 2002-genin köşelerinde birer tane bilye bulunur. Her adımda bilyelerden bazıları aynı vektör boyunca ötelenebilir. En az kaç adımda tüm bilyeler aynı doğru üzerine getirilebilir?

Çözüm. Başlangıçta her doğru üzerinde en fazla 2 bilye bulunur. İlk adımdan sonra her doğru üzerinde en fazla 4 bilye bulunacak v.s., 9. adımdan sonra her doğru üzerinde en fazla $2^{10} = 1024$ bilye bulunacak. Dolayısıyla 9 adımda 2002 bilyenin hepsi aynı doğru üzerine getirilemez. 10 adımda bilyelerin hepsinin aynı doğru üzerine getirilebileceği bir örnek verelim. Çemberi birbirine paralel ve aralarındaki uzaklık eşit olan $2^{10} = 1024$ tane doğru ile keselim. Kesişim noktalarından herhangi 2002 tanesine birer bilye yerleştirelim. (Bu noktalarbir dışbükey 2002 genin köşeleri olacak)(bkz.Şekil 3). Şimdi sol yarıdaki 2^9 tane doğruyu üzerlerindeki bilyelerle beraber $\vec{v}$ vektörü boyunca ötelediğimizde, tüm bilyeler sağdaki 2^9 tane doğrunun üzerinde bulunacak (Şekil 4). Benzer şekilde devam edersek, 10. adımdan sonra tüm bilyeler aynı doğru üzerinde bulunacak.



Şekil 3


Şekil 4

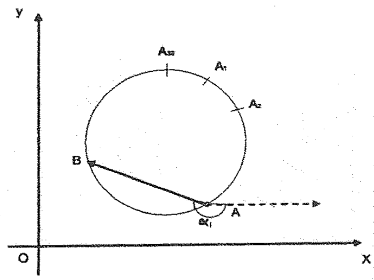
Y.259. Artan $f : R \to R$ fonksiyonu her $x \epsilon R$ için $f(-x) = -f(x)$ eşitliğini sağlar (yani, f tek fonksiyondur). Herhangi a, b, c sayıları için $a + b + c = 0$ ise, $f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a) \leq 0$ eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm. $F(x, y, z) = f(x)f(y) + f(y)f(z) + f(z)f(x)$ alalım. $F(-x, -y, -z) = F(x, y, z)$ özdeşliğinden ve F'in x, y, z değişkenlerine göre simetrik olmasından dolayı $c \leq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ durumu için $f(a, b, c) \leq 0$ eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermemiz yeterlidir. f fonksiyonu tek ve artan olduğundan her $x \geq 0$ için $f(x) \geq 0$ 'dir. $c = -a - b$ olduğundan $F(a, b, c) = f(a)f(b) + f(-a-b)[f(a) + f(b)] = f(a)f(b) - f(a+b)[f(a) + f(b)]$. $0 \leq f(a) \leq f(a+b)$ ve $0 \leq f(b) \leq f(a) + f(b)$ olduğundan $F(a, b, c) \leq 0$ elde edilir.

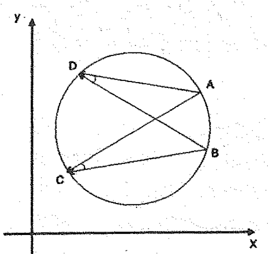
Y.260. Düzgün 30-genin köşelerine 1'den 30'a kadar tam sayılar yerleştirilmiştir. Her adımda iki komşu sayı yer değiştirebilir. Bir kaç böyle adımdan sonra her sayı tam karşıdaki köşeye geçmiştir. Bu adımların en az birinde toplamları 31 olan iki sayının yer değiştirdiğini kanıtlayınız.

Çözüm. Her $i = 1, 2, ..., 15$ sayısı için i'nin bulunduğu köşe A, $31 - i$ sayısının bulunduğu köşe B ise, $\overrightarrow{AB}$ vektörünün $\overrightarrow{Ox}$ ekseni ile oluşturduğu açıyı (saat yönünde) α_i (Şekil 5) ve $\alpha \equiv \sum_{i=1}^{15} \alpha_i$ $(mod 360°)$ ile gösterelim.

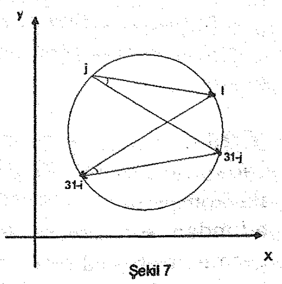
Her sayı tam karşıdaki köşeye geçerse, α açısı $15 \cdot 180° \equiv 180° (mod 360°)$ açısı kadar değişir. Diğer taraftan bir adımda toplamları 31 olan iki sayı (i ve $31 - i$) yer değiştirmiyorsa, bu adım



sonucu α da değişmez. Gerçekten komşu $1 \leq i$, $j \leq 15$ sayılarının yer değiştiğini varsayalım. i, j, $31 - i$, $31 - j$ sayıları sırasıyla A, B, C, D köşelerinde bulunsunlar (Şekil 6). O halde α_i, β_i açıları ile, yer değiştirmeden sonraki α_i', β_i' açıları arasında aşağıdaki şekilde bir bağlantı olacak. $\alpha_i' = \alpha_i + \beta$; $\alpha_j' = \alpha_j - \gamma$. Dolayısıyla $\alpha_i' + \beta_i' = \alpha_i + \beta_i$. Benzer şekilde $1 \leq i, j \leq 15$ olmak üzere, i ve $31 - j$ sayılarının yer değişmesi durumunda toplamın değişmediğini görüyoruz (bkz. Şekil 7). $31 - i$, $31 - j$ durumu da aynı şekilde incelenir. Böylece toplamları 31 olan sayılarının yerlerini değiştirmeden toplamı $180°$ değiştirmek mümkün değildir.



Şekil 6



Şekil 7

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla,İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.