CAHİT ARF MATEMATİK GÜNLERİ

Matematik Bölümü, Bilgi Üniversitesi

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini simgeler: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesini simgeler: $\mathbb{Z} = \{..., 2, 1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Q}$ kesirli (rasyonel) sayılar kümesini simgeler.
$\mathbb{R}$ reel (gerçel) sayılar kümesini simgeler.
$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ olarak tanımlanmıştır.
$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ olarak tanımlanmıştır.

$\mathcal{A}$ bir reel sayılar kümesi olsun.
Eğer $\mathcal{A}$'nin her iki a ve b öğesi için, $a - b$ sayısı gene $\mathcal{A}$'daysa, $\mathcal{A}$ kümesine **çıkarma altında kapalı denir**. Örneğin $\mathbb{Z}$ çıkarma altında kapalıdır ama $\mathbb{N}$ değildir.
Eğer $\mathcal{A}$'nın her iki a ve b öğesi için, $a + b$ gene $\mathcal{A}$'daysa, $\mathcal{A}$ kümesine **toplama altında kapalı denir.** Örneğin $\mathbb{N}$ toplama altında kapalıdır ama tek tamsayılar kümesi değildir.
Eğer $\mathcal{A}$'nin her iki a ve b öğesi için, ab de $\mathcal{A}$'daysa, $\mathcal{A}$ kümesine **çarpma altında kapalı** denir.
Eğer $\mathcal{A}$'nin her a öğesi için, a^2 de $\mathcal{A}$'daysa, $\mathcal{A}$ kümesine **kare alma altında kapalı** denir.
Eğer $\mathcal{A}$'nin her $a \neq 0$ öğesi için, a^{-1} de $\mathcal{A}$'daysa, $\mathcal{A}$ **kümesine tersini alma altında kapalı** denir.

Asağıdaki teoremi kullanmaya ihtiyacınız olabilir:
Teorem: *Eğer $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n \in \mathbb{Z}$ ve $a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + ... + a_n\pi^n = 0$ ise, o zaman $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ dir.*
Bu teoremi kanıtlamadan kullanabilirsiniz.

Önceki soruyu ya da soruları (kanıtlayamasanız dahi) sonraki soruların kanıtında kullanabilirsiniz.

1. *Çıkarma altında kapalı olan bir reel sayılar kümesinin toplama altında da kapalı olduğunu gösterin.*
Kanıt: $x + y = x - ((x - x) - y)$.

2. *Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ve her öğesinin yarısını da içeren bir reel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.*
Kanıt: $xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}$.

3. *Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ve 1/2'yi de içeren bir reel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.*
Kanıt: 1/2 kümede olduğundan, karesi 1/4 de kümede. Asağıdaki eşitliğe dikkatinizi çekeriz:

$$x/2 = (x + 1/4)^2 - x^2 - (1/4)^2.$$

Demek ki küme ikiye bölme altında kapalı. Şimdi ikinci soruyu kullanın.

4. *Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ama çarpma altında kapalı olmayan bir reel sayı kümesi bulun. (6. soruya dikkatinizi çekeriz.)*
Yanıtlardan biri: $a_1 + a_2\pi^2 + 2a_3\pi^3 + a_4\pi^4 + ... + a_n\pi^n : n \in \mathbb{N} - \{0\}, \mathbf{a_i} \in \mathbb{Z}$.

5. *Çıkarma ve tersini alma altında kapalı olan ve 1/2'yi içeren bir reel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.*
Yanıt: Önce 1'in kümede olduğuna dikkatinizi çekeriz. Simdi şu eşitliğe bakın:

$$((y - (1 + y^{-1})^{-1})^{-1} + y^{-1})^{-1} = y^2$$

ve üçüncü soruyu kullanın.

6. *Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan bir kesirli sayı kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.*
Yanıt: $\mathcal{A}$, çıkarma ve kare alma altında kapalı olan bir gerçel sayılar kümesi olsun. $u, v \in \mathcal{A}$ olsun. Bu sayıları kesirli sayı olarak yazalım: $u = a/b$ ve $v = c/d$ (burada $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$). Ve e, ad ve bc

sayılarının en büyük ortak böleni olsun. Şimdi

$$u = a/b = (e/bd)(ad/e) \in (e/bd)\mathbf{Z}$$

ve

$$v = c/d = (e/bd)(bc/e) \in (e/bd)\mathbf{Z}.$$

Demek ki $uv \in (e^2/b^2d^2)\mathbf{Z}$. Dolayısıyla uv sayısının $\mathcal{A}$'da olduğunu kanıtlamak için, e^2/b^2d^2 sayısının $\mathcal{A}$'da olduğunu kanıtlamalıyız. Bunun için de e/bd sayısının $\mathcal{A}$'da olduğunu göstermek yeterli. $e = gcd(ad, bc)$ olduğundan, öyle x ve y tamsayıları vardır ki $adx + bcy = e$. Demek ki $e/bd = (adx + bcy)/bd = (a/b)x + (c/d)y \in \mathcal{A}$.

7. *$Q[\sqrt{2}]$ (ya da $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$) kümesinin bir altkümesi çıkarma ve kare alma altında kapalıysa çarpma altında da kapalı mıdır?*

Yanıt: Bu sorunun yanıtını yarışmadan önce biz de bilmiyorduk. Araştırmaya yönelik bir yarışma hazırlamak istediğimizden, yanıtını bilmedigimiz bir soruyu yarışmaya eklemekte bir sakınca görmedik Şimdi $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ için yanıtı biliyoruz. Evet, $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$'nin çıkarma ve kare altında kapalı olan bir altkümesi çarpma altında da kapalıdır. Ne yazık ki bulabildiğimiz kanıt lise düzeyini aşmakta ve orta düzeyde soyut cebir bilgisi gerektirmektedir.

$\mathcal{A}$, $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ kümesinin çıkarma ve kare alma altında kapalı bir altkümesi olsun. $\mathcal{A}$'nin boşküme olmadığını varsayabiliriz. Birinci sorudan $\mathcal{A}$'nin toplama altında kapalı olduğunu biliyoruz. Demek ki eğer $n \in \mathbf{Z}$ ve $\alpha \in \mathcal{A}$ ise, o zaman $n\alpha \in \mathcal{A}$. Biraz orta düzey soyut cebir bilgisinden şu çıkar: Öyle bir $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ vardir ki $\mathcal{A} = \mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}\beta$. (Bu olduğunun kanıtı: $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ iki öğe tarafından gerilmiş özgür bir $\mathbf{Z}$-modüldür (örneğin 1 ve $\sqrt{2}$ tarafından.) Dolayısıyla, $\mathcal{A}$ da en çok iki öğe tarafından gerilmiş bir $\mathbf{Z}$-modüldür.)

Demek ki $\mathcal{A}$'nin her öğesi, $n\alpha + m\beta$ $(n, m \in \mathbf{Z})$ olarak yazılabilir. $2\alpha\beta$ öğesi $\mathcal{A}$'da olduğundan, belli bir $u, v \in \mathbf{Z}$ için,

$$2\alpha\beta = n\alpha + m\beta \tag{1}$$

eşitliği geçerlidir. Bir de şuna dikkatinizi çekeriz: " $\alpha\beta \in \mathcal{A}$" koşulu $\mathcal{A}$'nin çarpma altında kapalı olması için gerek ve yeter koşuldur. Dolayısıyla $\alpha\beta \in \mathcal{A}$ önermesini kanıtlamak yeterlidir.

Önce m'nin tek sayı olduğunu varsayalım. (1) denkleminden $2\alpha^2\beta = n\alpha^2 + m\alpha\beta$ denklemini, bundan da

$$m\alpha\beta = 2\alpha^2\beta - n\alpha^2 \tag{2}$$

denklemini elde ederiz. α^2 ve β elemanları $\mathcal{A}$'da olduklarından, $2\alpha^2\beta \in \mathcal{A}$. Öte yandan $n\alpha^2$ elemanının da A'da olduğunu biliyoruz. Demek ki, (2) denkleminden $m\alpha\beta$ elemanının da $\mathcal{A}$'da olduğu anlaşılır. Ama m tek bir tamsayı ve $2\alpha\beta \in \mathcal{A}$. Şimdi, $2\alpha\beta$ ve $m\alpha\beta$ sayılarını yeterince toplayıp çıkararak $\alpha\beta$ sayısının da $\mathcal{A}$'da olduğunu görürüz. Demek ki m tekse $\alpha\beta \in \mathcal{A}$. Dolayısıyla m'nin çift olduğunu varsayabiliriz. Aynı biçimde n'nin çift olduğunu da varsayabiliriz. Ama hem n hem m çiftse, (1) denklemini sadeleştirip, $\alpha\beta \in \mathcal{A}$ koşulunu elde ederiz. Bu sorunun $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ için yanıtını hl bilmiyoruz.

8. ***Yukardaki sorulara benzer sorular bulup yanıtlamaya çalışın.***

CAHIT ARF MATEMATİK GÜNLERİİ 17 Nisan 2002 ve 8 Mayıs 2002 tarihleri arasında İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümünce organize edilmiş ikili yazılı çalışmadır.

Amaç: Lise öğrencilerinin ve toplumun soyut matematiğe olan ilgilerini arttırmak ve bilinçlendirme yaratıcı genç insanları tespit edip onları soyut matematik dalında eğitim görmeleri konusunda teşvik etmektir.