VII. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI-2002 2.SEÇME SINAVI (SORULAR VE KISA ÇÖZÜMLER)

İlham Aliyev - Mutlu Güloğlu - Doğan Çoker

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Bu yıl yedincisi düzenlenen Antalya Matematik Olimpiyatları'nın ilk aşaması 20 Nisan 2002 'de test olarak, ikinci aşaması da 18 Mayıs 2002 'de yazılı olarak gerçekleştirildi. Artık, geleneksel bir şekle gelen Antalya Matematik Olimpiyatları 'nın ilki 1996 yılında Antalya, Isparta merkez okulları ile Alanya ve Kaş ilçesinden okulların katılımıyla yapılmıştı. Bu yıldan sonra okulların gösterdiği ilginin bize verdiği heyecanın da etkisiyle olimpiyat ulusal alanda yapılmaya başlandı.

Matematik Olimpiyatlarının asıl amacı yetenekli çocukları, bir başka deyişle, Türkiye 'nin genç dehalarını ortaya çıkarmak ve bu yolla Türkiye 'nin geleceğine katkıda bulunmaktır. Bunun nedeni ise çok açıktır; bilimde ilerlemeyi ve büyük buluşları genellikle sıradan bilim adamları değil, dahiler gerçekleştirmişlerdir.

Antalya Matematik Olimpiyadını Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü ile Akdeniz Üniversitesi Sağlık Kültür ve Spor Dairesi Başkanlığına bağlı Akdeniz Üniversitesi Matematik Kulübü birlikte düzenlemektedir. Türkiye çapında TÜBİTAK'ın yaptığı olimpiyat sınavları dışında matematik olimpiyadı düzenli olarak bir tek Akdeniz Üniversitesinde gerçekleştirilmektedir. Matematik Olimpiyatlarının Akdeniz Üniversitesince yapılabilmesinin başlıca nedeni, olimpiyatları düzenlemenin güçlüğünün yanı sıra, Akdeniz Ünivesitesinin akademik personelinden, idari personeline ve hatta öğrencisine kadar bu işin önemini kavraması ve fedakarca bu konuya ilgi göstermesidir.

İlk Antalya Matematik Olimpiyadı 1996'da o zamanki bölüm başkanımız Prof. Dr. Halil İ. Karakaş ve Doç. Dr. İlham Aliyev tarafından gerçekleştirilmiştir. 2000 yılındaki V. Antalya Matematik Olimpiyadının düzenlenmesinde, geçtiğimiz yıl kaybettiğimiz değerli hocamız Dr. Fikri Gökdal'ın da büyük emeği geçmiştir. Özellikle Dr. Fikri Gökdal yıllarca matematik olimpiyatı düşüncesinin yurdumuzda okullara yaygınlaşmasında büyük rol oynamıştır. Bunun yanı sıra saydığımız bu üç kişi, yıllardır Türk Ulusal Olimpiyat Takımınının eğitiminde görev alan ve takımla birlikte yurtdışında bizi temsil eden değerli hocalarımız arasında yer almaktadır. Bu yılki olimpiyatların sorularının hazırlanmasında Prof. Dr. Doğan Çoker, Doç. Dr. İlham Aliyev, Doç. Dr. Gabil Adilov, Araş. Gör. Mutlu Güloğlu, Araş. Gör. Melih Eryiğit ve Araş. Gör. Ramazan Tınaztepe emek vermiştir. Soruların değerlendirilmesinde ise tüm Matematik Bölümü elemanları çalışmıştır. Bunun yanında olimpiyatın organizasyonunu da başta Üniversitemizin Sağlık Kültür ve Spor Dairesi Başkanı Cemal Öcal olmak üzere bu birimin tüm personelinin katkısı çok büyüktür.

Geçtiğimiz yıllarda olduğu gibi, bu yıl da Türkiyeyi Dünya ve Balkan Matematik Olimpiyatlarında temsil edip, madalya alan öğrencilerin hemen hepsi Antalya Matematik Olimpiyatına da katıldılar (ve doğal olarak çok iyi performans gösterdiler). Bu da Türkiye çapında Antalya Matematik Olimpiyatlarına gösterilen ilginin açık kanıtıdır. Antalya Matematik Olimpiyadına Erzincan'dan Trabzon'a, Edirne'den Urfa'ya kadar Türkiye'nin dört bir yanından öğrenciler katılması Türk Matematiğinde bir uyanışın habercisidir. Bunda da Akdeniz Üniversitesinin matematikseverleri olarak az da olsa bir katkımız olduğu için gurur duyuyoruz.

LİSE I SORULARI

(1) 7 balıkçı toplam 100 balık yakalamıştır. Herhangi iki balıkçının farklı sayıda balık yakaladığını bilerek, birlikte en az 50 balık yakalamış olan üç balıkçının varlığını kanıtlayınız.

(2) Toplamları bir doğal sayının 2002. kuvveti olan 2002 tane ardışık tek sayı bulunuz.

(3) Tamsayı katsayılı $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ denkleminin rasyonel kökü varsa, a, b ve c sayılarından en az biri çift sayıdır; kanıtlayınız.

(4) a, b ve c sayıları bir dik üçgenin kenar uzunlukları ise,

$$(3abc)^3 > (a^3-b^3-c^3)(b^3-c^3-a^3)(c^3-a^3-b^3)$$

eşitsizliğinin sağlanacağını gösteriniz.

(5) Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninde $[AB]$ kenarı üzerinde alınmış bir D noktası için $\frac{|AD|}{|DC|}=\frac{|AB|}{|BC|}$ eşitliği sağlanıyors $\overset{\wedge}{ACB}$ açısının geniş açı olduğunu gösteriniz.

LİSE I KISA ÇÖZÜMLERİ

(1) En çok balık tutan balıkçıya "birinci", geriye kalanlar içinde en çok balık tutan balıkçıya "ikinci" v.s. diyerek, balıkçıları numaralayalım. Bu numaralamada ilk üç balıkçının tutmuş olduğu balık sayısının 50 'den az olmadığını görelim.

3.balıkçı ≥ 16 sayıda balık yakalamış ise, her balıkçı farklı sayıda balık yakaladığından, 2.balıkçı ≥ 17 ve 1.balıkçı ≥ 18 balık yakalamış olacaktır ve bunların toplam sayısı $\geq 16+17+18=51$ olacaktır.

Eğer 3.balıkçı ≤ 15 tane balık yakalamış olsaydı, bu takdirde, 4.balıkçı ≤ 14; 5.balıkçı ≤ 13; 6.balıkçı ≤ 12 ve 7.balıkçı ≤ 11 tane balık yakalamış olurdu. Bu durumda son dört balıkçı, toplam olarak, $\leq 14+13+12+11=50$ balık yakalamış olduğundan, ilk üç balıkçı $\geq 100-50=50$ balık yakalamış olurdu.

(2) $(n-2001)+(n-1999)+(n-1997)+\cdots+(n-1)+(n+1)+\cdots+(n+1997)+(n+1999)+(n+2001)=2002.n$ eşitliğinde $n=2002^{2001}$ koyarsak, eşitliğin sol tarafı 2002 tane ardışık tek sayının toplamı ve sağ tarafı ise 2002^{2002} olacaktır.

Not: Seçenek sayısı sonsuzdur: her $K\in\mathbb{N}$ için $n=2002^{2001}.K^{2002}$ alabiliriz.

(3) "Düz Çözüm": Denklemin kökleri için iyi bilinen

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

formülüne göre, köklerden birinin rasyonel olmasından $\sqrt{b^2-4ac}$ sayısının rasyonel olması çıkar. Öte yandan, b^2-4ac tamsayı olduğuna göre $\sqrt{b^2-4ac}$ rasyonel sayısı bir tamsayıdır. $\sqrt{b^2-4ac}=k$ dersek,

$$b^2-4ac=k^2 \Rightarrow (b-k)(b+k)=4ac.$$

b bir çift sayı ise, iş biter. b 'nin tek sayı olduğunu varsayalım: $b = 2s + 1$. O halde k da bir tek sayıdır: $k = 2r + 1$. Yukarıdaki eşitlikte yerine koyarsak,

$$4(s-r)(s+r+1) = 4ac \Rightarrow (s-r)(s+r+1) = ac$$

olur. Sonuncu eşitlikte sol taraf her zaman çift sayı olduğundan, sağ taraf da bir çift sayıdır.

"Olimpiyatik" Çözüm: $x = \frac{y}{a}$ dersek, denklem, $y^2 + by + ac = 0$ şekline düşer. x, ilk verilen denklemin rasyonel kökü ise, $y = ax$ sayısı da yeni denklemin rasyonel kökü olacaktır. Yeni denklemin kökleri

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

rasyonel olduğundan, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ rasyoneldir ve dolayısıyla tamsayıdır. O halde, b 'nin tek veya çift oluşuna bağımlı olmaksızın, y_1 ve y_2 de birer tamsayıdır. Vieta Teoremine göre,

$$-(y_1 + y_2).y_1y_2 = bac$$

'dir. Sol taraf çift sayı olduğundan, sağ taraf da bir çift sayıdır.

(4) Genelliği bozmadan, $a > b \geq c$ varsayabiliriz. Yani, a hipotenüsün uzunluğu olup, $a^2 = b^2 + c^2$ 'dir.

$$a^3 = a.a^2 = a(b^2 + c^2) = ab^2 + ac^2 > b^3 + c^3$$

olduğundan, problemde verilen eşitsizliğin sağ tarafında ilk terim pozitiftir. Son iki terimin her biri negatif olduğundan, çarpımları pozitiftir. Son iki terimi çarparsak,

$$(a^3 + b^3 - c^3)(a^3 + c^3 - b^3) = a^6 - (b^3 - c^3)^2 = a^6 - b^6 - c^6 + 2b^3c^3 \tag{1}$$

olur. Diğer yandan, $a^2 = b^2 + c^2$ eşitliğinde her iki yanın küpünü alırsak,

$$a^6 = b^6 + c^6 + 3(b^2c^4 + c^2b^4) < \cdots (c^2 < a^2 \quad \text{ve} \quad b^2 < a^2) \cdots < b^6 + c^6 + 3(b^2c^2a^2 + c^2b^2a^2)$$
$$\Rightarrow a^6 - b^6 - c^6 < 6a^2b^2c^2.$$

Bunu (1) 'de yazarsak,

$$(a^3 + b^3 - c^3)(a^3 + c^3 - b^3) < 6a^2b^2c^2 + 2b^3c^3 < \cdots (bc < a^2) \cdots < 6a^2b^2c^2 + 2b^2c^2a^2 = 8a^2b^2c^2$$

olur.

Böylece,

$$0 < (a^3 + b^3 - c^3)(a^3 + c^3 - b^3) < 8a^2b^2c^2\ . \tag{2}$$

Şimdi, problemdeki eşitsizlikte ilk terim için

$$0 < a^3 - b^3 - c^3 < \tfrac{3}{2}abc \tag{3}$$

sağlandığını görelim. Üçgen eşitsizliğinden $a - b - c < 0 \Rightarrow (a-b-c)^3 < 0 \Rightarrow$

$$a^3 - b^3 - c^3 + 3a(b^2 + c^2) - 3b(a^2 + c^2) - 3c(a^2 + b^2) + 6abc < 0\ .$$

Kosinüs Teoreminden

$$a^2 + c^2 = b^2 + 2ac\cos B\ ,\ a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos C\ ,\ b^2 + c^2 = a^2.$$

Bunu bir üstteki eşitsizlikte gözönüne alırsak $4(a^3 - b^3 - c^3) + 6abc(1 - \cos B - \cos C) < 0 \Rightarrow$

$$4(a^3 - b^3 - c^3) < 6abc(\cos B + \cos C - 1) < 6abc(1 + 1 - 1) = 6abc \Rightarrow a^3 - b^3 - c^3 < \frac{6}{4}abc = \frac{3}{2}abc$$

olur.

Şimdi, (2) ve (3) eşitsizliklerini taraf tarafa çarparsak,

$$0 < (a^3 - b^3 - c^3)(a^3 + b^3 - c^3)(a^3 + c^3 - b^3) < \frac{3}{2}abc.8a^2b^2c^2 = 12a^3b^3c^3 < (3abc)^3$$

elde ederiz.

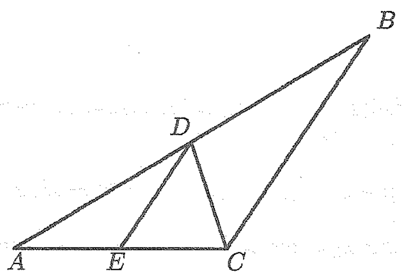
Not 1: İspat yolu incelenirse, eşitsizliğin dar açılı üçgenler için de doğru olduğu görülebilir. ($b^2+c^2 = a^2$ yerine $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$ yazılacak.)

Not 2: Lise I 'in en zor sorusu, gördüğünüz gibi, bu sorudur. Çok üzülerek ve sevgili öğrencilerimizden özür dileyerek belirtelim ki, bu sorunun ifadesinde önemli bir yazı hatası yapılmış ve "bir dik üçgenin" ifadesi yerine "bir üçgenin" ifadesi yazılmıştır. Bunu biz sınavın bitimine çok az kaldığında fark ettik ve yapacağımız bir şey olmadığından, bir açıklama yapmadık.

Sınavın değerlendirilmesi aşamasında jüri üyeleri, yazım hatasından dolayı ortaya çıkacak aksaklıkları minimuma indirmek için gereken çabayı göstererek, sözkonusu problemin değerlendirilmesi için makul bir formül buldular.

Onu da belirtelim ki, dik ve dar açılı üçgenler için doğru olan eşitsizlik, bazı geniş açılı üçgenler için tersine dönebilir.

(5)



$DE \parallel BC$ çizelim.

$$\overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

Öte yandan, problemin verilerine göre, $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$.

Demek ki, $|DE| = |DC|$ 'dir. Yani, $\overset{\triangle}{DEC}$ bir ikizkenar üçgendir. Öyleyse,

$$D\hat{E}C < 90^o \Rightarrow D\hat{E}A > 90^o \Rightarrow B\hat{C}A = D\hat{E}A > 90^o .$$

LİSE II SORULARI

(1) a, b, c ve $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$ sayıları

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xy + 1 & = & az \\ yz + 1 & = & bx \\ zx + 1 & = & cy \end{array} \right\}$$

eşitliklerini sağlayan pozitif tamsayılar olsunlar. Bu takdirde a, b ve c sayılarının en büyüğü kaçtır?

(2) $2a_n + a_{n-1}$, $(n = 1, 2, 3, ...)$ dizisinin sınırlı olması halinde a_n, $(n = 0, 1, 2, ...)$ dizisinin de sınırlı olacağını gösteriniz.

(3) Düzlem üzerinde, herhangi üçü doğrusal olmayan 2002 tane nokta işaretlenmiştir. Öyle 3 işaretlenmiş nokta bulunabilir ki, bu noktalardan geçen çember, işaretlenmiş noktalardan hiç birini içinde bulundurmasın; kanıtlayınız.

(4) a, b, p, q, r, s pozitif tamsayıları

$$qr - ps = 1 \text{ ve } \frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$$

bağıntılarını sağlamaktadırlar. Bu durumda, $b \geq q + s$ eşitsizliğinin sağlanacağını gösteriniz.

(5) Bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $|BC| > 2.|AB|$ eşitsizliği sağlansın. Sadece pergel ve cetvel kullanarak, $[AC]$ kenarı üzerinde,

$$|AB| + |BD| + |DA| = |BC|$$

eşitliğini sağlayan D noktasının yerini bulunuz.

NOT: Cetvel uzunluk ölçmeye değil, yalnızca herhangi iki noktadan geçen doğruyu çizmeye yarar.

LİSE II KISA ÇÖZÜMLERİ

(1) x, y ve z sayıları aralarında asal olduğu için üçü de farklı sayılardır. Genelliği bozmadan $2 \leq x < y < z$ varsayabiliriz. Verilen eşitlikleri taraf taraf çarparsak,

$$xyz(xyz + x + y + z) + (xy + yz + zx + 1) = abcxyz$$

olur. Buradan, $xy + yz + zx + 1$ sayısının xyz sayısına bölündüğünü söyleyebiliriz. Dolayısıyla,

$$xy + yz + zx + 1 = A.xyz$$

sağlanacak biçimde $A \in \mathbb{N}$ vardır.

Şimdi,

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz}$$

eşitliğinden $A \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3.4} = \frac{27}{24}$ elde edilir ve buradan, A doğal sayı olduğu için, $A = 1$ çıkar.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = 1 \text{ ve } 2 \leq x < y < z$$

bağıntılarından $x = 2$ elde edilir. Gerçekten, $x \geq 3$ olursa, $y \geq 4$ ve $z \geq 5$ olacağından,

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3.4.5} = \frac{48}{60} < 1$$

çelişkisi elde edilir.

Şimdi de $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2yz}$ eşitliğinden $y = 2 + \frac{5}{z-2}$ olur. $z - 2$ sayısı 5'in bir böleni olacağından, $z = 3$ veya $z = 7$ olmalıdır. $x < y < z$ eşitsizliğinden dolayı, $z = 7$ ve dolayısıyla, $y = 3$ olur.

Sonuçta $x = 2$, $y = 3$, $z = 7$ değerlerini verilen denklemler sisteminde yerine koyarsak, $a = 1, b = 11, c = 5$ elde edilir. Buradan, $max\{a, b, c\} = 11$ olur.

(2) $2a_n + a_{n-1} = b_n$ diyelim. Varsayıma göre, her $n \in \mathbb{N}$ için $|b_n| \leq C$ sağlanacak şekilde bir C sabiti vardır. Her $n \geq 1$ için $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_n$ sağlandığını gözönüne alarak, şunları yazabiliriz:

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}a_{n-2} + \frac{1}{2}b_{n-1}) + \frac{1}{2}b_n \\ &= \frac{(-1)^2}{2^2}a_{n-2} + \frac{(-1)^1}{2^2}b_{n-1} + \frac{1}{2}b_n \\ &= \frac{(-1)^2}{2^2}(-\frac{1}{2}a_{n-3} + \frac{1}{2}b_{n-2}) + \frac{(-1)^1}{2^2}b_{n-1} + \frac{1}{2}b_n = \\ &= \frac{(-1)^3}{2^3}a_{n-3} + \frac{(-1)^2}{2^3}b_{n-2} + \frac{(-1)^1}{2^2}b_{n-1} + \frac{1}{2}b_n = \cdots = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}a_0 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}b_1 + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-1}}b_2 + \cdots + \frac{(-1)^1}{2^2}b_{n-1} + \frac{1}{2}b_n. \end{aligned}$$

Buradan,

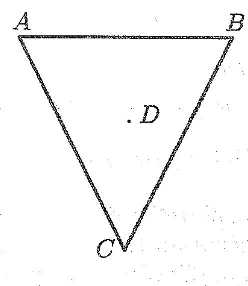
$$|a_n| \leq \frac{1}{2^n}|a_0| + (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2})C \leq |a_0| + C$$

elde edilir.

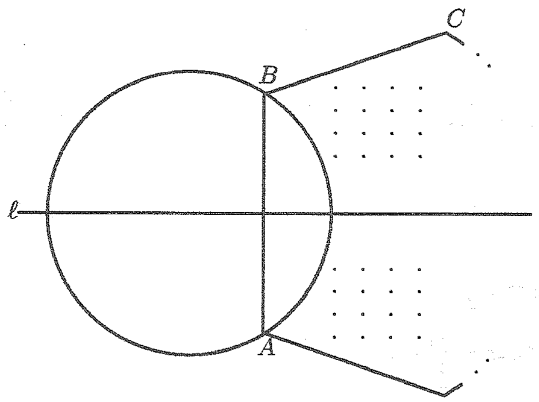
(3) **"Çözüm 1"** İşaretlenmiş noktalar içinde birbirine en yakın olan ikisini (eğer böyle ikili sayısı birden fazla ise, ikililerden herhangi birini) alalım ve bu noktalara A ve B diyelim. Çapı $|AB|$ olan çember içinde hiç işaretlenmiş nokta bulunmayacaktır. Geriye kalan 2000 tane noktayı herhangi bir şekilde numaralayalım: $C_1, C_2, \cdots, C_{2000}$. Şimdi, A, B ve C_k, $(k = 1, 2, \cdots, 2000)$ noktalarından geçen 2000 tane çembere bakalım (bu çemberler içinde çakışanlar da olabilir). $A\overset{\wedge}{C_k}B$, $(k = 1, 2, \cdots, 2000)$ açıları içinde en büyüğü $A\hat{C}B$ olsun. İşte, A, C, B noktalarından geçen çemberin içinde hiç işaretlenmiş nokta bulunmayacaktır. ($|AB| \leq |AC|$ ve $|AB| \leq |BC|$ olduğunu unutmayınız!)

Not: noktaları üçer üçer alarak, onlardan geçen çemberlerin (en fazla $\binom{2002}{3}$ tane çember) en küçüğü yardımıyla ispat yapmak zor olabilir.

Örnek olarak, şekilde işaretlenmiş noktalar bir eşkenar üçgenin köşe noktaları ve merkezi olursa, herhangi 3 işaretlenmiş noktadan geçen çemberin yarıçapı aynıdır. Buna karşın, D noktası, A, B, C noktalarından geçen çemberin içinde bulunuyor.



"Çözüm 2" İşaretlenmiş noktaların her birini içinde veya bir köşesinde bulunduran en küçük konveks çokgeni düşünelim. O halde köşelerin her biri işaretlenmiş noktalar olacak ve kenarlar üzerinde başka işaretlenmiş nokta bulunmayacaktır. (Çünkü noktaların herhangi üçü doğrusal değildir.)



Şimdi, şekilde, A ve B noktalarını içeren tüm çemberleri düşünelim. $[AB]$ parçasının ortasından geçen ve $[AB]$ 'ye dik olan ℓ doğrusu üzerinde alınmış herhangi noktayı merkez kabul ederek, A ve B 'den geçen çemberler çizersek, A ve B 'den geçen tüm çemberler ailesini elde edebiliriz.

Şimdi merkezi ℓ üzerinde kaydırarak, öyle çember çizilebilir ki, üzerinde A ve B dışında en az bir işaretlenmiş nokta bulunur ve çemberin kapsadığı düzlem bölgesi içinde hiç işaretlenmiş nokta bulunmaz. (Ayrıntıları size bırakıyoruz!)

(4)

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{aq-pb}{bq} > 0 \Rightarrow aq - pb > 0 \Rightarrow aq - pb \geq 1, \qquad (1)$$

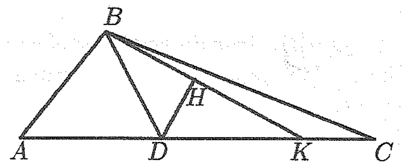
$$\frac{r}{s} - \frac{a}{b} = \frac{rb-as}{sb} > 0 \Rightarrow rb - as > 0 \Rightarrow rb - as \geq 1. \qquad (2)$$

(1) eşitsizliğinin her iki yanını s ile ve (2) eşitsizliğinin her iki yanını q ile çarparak taraf tarafa toplarsak,

$$qrb - spb \geq s + q \Rightarrow b(qr - sp) \geq s + q \Rightarrow qr - sp = 1$$

olduğu için $b \geq s + q$ elde edilir.

(5)



Şekilde, D noktasının, $|AB| + |BD| + |AD| = |BC|$ eşitliğini sağlayan nokta olduğunu varsayalım. Üçgenin AC kenarı üzerinde $|DK| = |DB|$ sağlayacak biçimde K noktası alırsak,

$$|AK| = |AD| + |DK| = |AD| + |DB| = |BC| - |AB|$$

olur. Bu, bize D noktasını bulmanın yolunu gösterir: AC kenarı üzerinde, A noktasından başlayarak, uzunluğu $|BC| - |AB|$ olan AK doğru parçasını ayırıyoruz. K ve B noktalarını birleştiren BK parçasının orta noktası olan H 'den BK 'ya dik olan doğruyu çiziyoruz. İşte, bu doğrunun AC ile kesişim noktası istediğimiz D noktası olacaktır.

Gerçekten, $|BD| = |DK|$ olduğundan,

$$|BC| - |AB| = |AK| = |AD| + |DK| = |AD| + |DB| \Rightarrow |BC| = |AB| + |AD| + |DB|$$

bulunur.

Not: Pergel ve cetvel kullanarak, bir doğru parçasının ortasından geçen ve ona dik olan doğrunun nasıl çizilebildiğini sizlere bırakıyoruz.

"GÜNESİ BALÇIKLA GEL DE SIVA.
GİZLİ TÜRKÜLERİ GEL DE SÖYLE.
BİR GÜZEL İNCİ ÇIKARDI AKIL.
DÜŞÜNCEMİN DENİZİNDEN.
SIKIYSA GEL DE DEL. "
Ömer Hayyam