

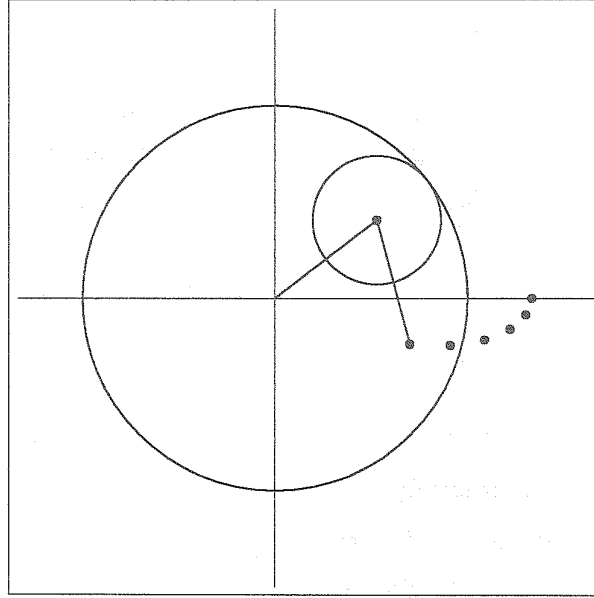
DÖNEN UZAYLAR

Sibel Paşalı

Muğla Üniversitesi / Muğla

Dönen uzaylar bir eğriler ailesini tanımlar. Sabit bir çember üzerinde dönen başka bir çemberin hareketine göre bir doğru üzerindeki bir noktanın bırakmış olduğu iz olarak da tanımlanabilir. Bir çoğunuz kitapçılarda veya işportada çocuklar için satılan iç içe geçebilen, üzerleri delikli çemberler ve renkli kalemlerden oluşan geometri setini görmüş, veya bunlardan estetik yönden kusursuz olan geometrik şekiller çizmişsinizdir. Bu makalede söz konusu edilen bu geometrik şekiller, onların parametrik denklemleri ve aralarındaki ilişkilerin bazılarıdır. Eğrilerin sınıflara ayrılmasının bir çok yolu vardır. Bu yollardan biri, bir eğriyi $p(x, y) = 0$ polinom denkleminin grafiği olup olmadığını belirlemekle başlar.

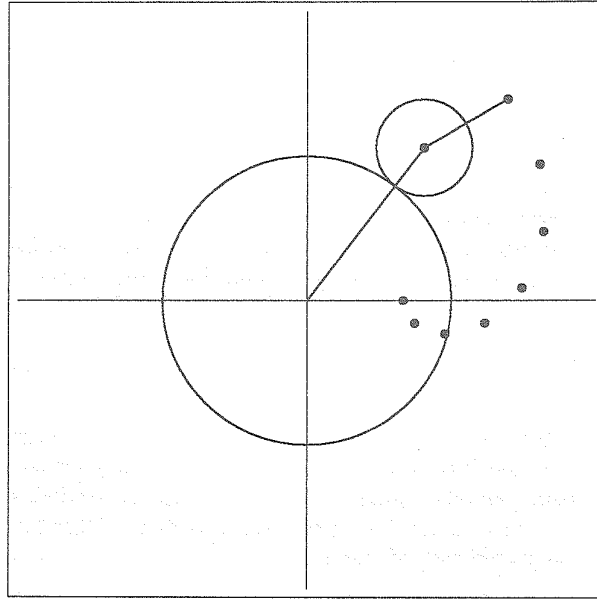
Tanım 1: Birbirine içten teğet olan iki çemberin merkezleri teğet noktasından geçen bir doğru üzerinde olsun. Bu çemberlerden biri sabit durmak üzere diğeri kaymaksızın sabit olan çemberin üzerinde hareket ediyor olsun. Hareket eden çemberin bir çapı üzerindeki veya bu çapın uzantısı üzerindeki herhangi bir noktanın bıraktığı izi **hypotrochoid** denir. Eğer bu nokta dönen çemberin çevresi üzerinde ise bu eğriye **hypocycloid** denir.



Şekil 1: Hypotrochoid

Tanım 2: Birbirine dıştan teğet olan iki çemberin merkezleri teğet noktasından geçen bir doğru üzerinde olsun. Bu çemberlerden biri sabit durmak üzere diğeri kaymaksızın sabit olan çemberin üzerinde hareket ediyor olsun. Hareket eden çemberin bir çapı üzerindeki veya bu çapın uzantısı üzerindeki herhangi bir noktanın bıraktığı izi **epitrochoid** denir. Eğer bu nokta dönen çemberin çevresi üzerinde ise bu eğriye **epicycloid** denir.

Sabit çemberin merkezi orijinde olsun. x ekseniyle (pozitif tarafı) çemberlerin merkezlerini birleştiren doğru arasındaki açı (saatin ters yönü) θ olsun. n sabit olan çemberin, m ise dönen çemberin yarıçapları olsun. d dönen çemberin merkezi ile izi alınacak nokta arasındaki uzaklık ve a ise iz



Şekil 2: Epitrochoid

noktasının kutupsal koordinat sistemindeki (sabit çemberin merkezine göre) kutupsal açısı olsun. hy hypotrochoid ve ep de epitrochoid'i gösterebiliriz. Bunların parametrik denklemleri şunlardır:

$$hy[\theta, n, m, r, a] = \{x[\theta], y[\theta]\},$$

burada

$$\begin{aligned} x[\theta] &= (n - m) \cos[\theta + a] + d \cos\left[\frac{(n - m)\theta}{m} - a\right] \\ y[\theta] &= (n - m) \sin[\theta + a] - d \sin\left[\frac{(n - m)\theta}{m} - a\right], \end{aligned}$$

$x + iy = (n - m)[\cos[\theta + a] + i \sin[\theta + a]] + d[\cos\left[\frac{(n - m)\theta}{m} - a\right] - i \sin\left[\frac{(n - m)\theta}{m} - a\right]]$, eşitliğinde $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} x + iy &= (n - m)e^{i(\theta+a)} + de^{-i\left(\frac{n-m}{m}\theta - a\right)} \\ &= [(n - m)e^{i\theta} + \frac{rm}{e^{i\left(\frac{n-m}{m}\theta}\right)}]e^{ia} \end{aligned}$$

elde edilir. $\tau = e^{i\theta}$ olsun. Bu durumda

$$h[\tau, n, m, r, a] = ((n - m)\tau + \frac{d}{\tau^{\frac{n-m}{m}}})e^{ia}.$$

olur. Benzer şekilde:

$$e[\tau, n, m, r, a] = ((n + m)\tau - d\tau^{\frac{n+m}{m}})e^{ia}.$$

denklemden $t = \tau^{\frac{n-m}{m}}$ dönüşümü kullanılarak

$$h[\tau, n, m, r, a] = ((n - m)\tau + \frac{d}{\tau^{\frac{n-m}{m}}})e^{ia},$$

elde edilir. Buna göre yeni hypotrochoid dönüşüm denklemi

$$hymap[t, n, m, r, a] = ((n - m)t^{\frac{m}{n-m}} + \frac{mr}{t})e^{ia}, \quad (1)$$

olur. Epitrochoid parametrik denklemi

$$ep[\theta, n, m, r, a] = \{x'[\theta], y'[\theta]\},$$

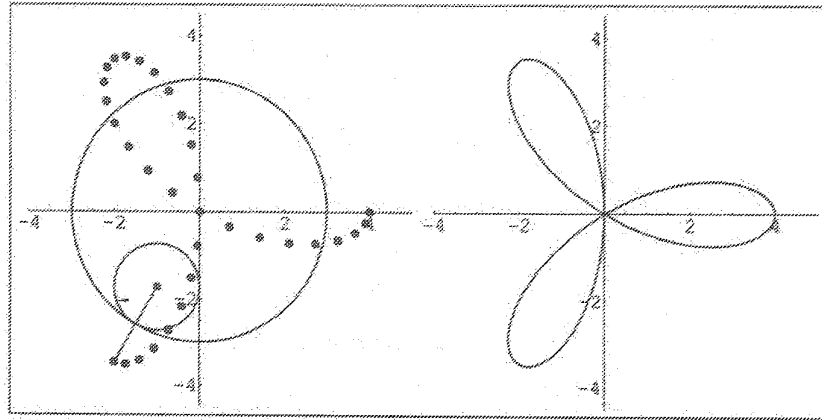
ve burada

$$\begin{aligned} x'[\theta] &= (n + m) \cos[\theta + a] - d \cos\left[\frac{(n + m)\theta}{m} + a\right] \\ y'[\theta] &= (n + m) \sin[\theta + a] - d \sin\left[\frac{(n + m)\theta}{m} + a\right]. \end{aligned}$$

Yeni epitrochoid dönüşüm denklemi ise aşağıdaki gibidir:

$$epmap[t, n, m, r, a] = ((n + m)t^{\frac{m}{n+m}} - rmt)e^{ia}.$$

Örnek 1: Parametrik denklemleri $\{2 \cos \theta + 2 \cos 2\theta, 2 \sin \theta - 2 \sin 2\theta\}$ olan $hy[\theta, 3, 1, 2, 0]$ eğriyi çizelim. Burada sabit çemberin yarıçapı 3, dönen çemberin yarıçapı 1, dönen çemberin merkezinden iz noktasına olan uzaklık 2 olsun. Bu değerler altında aşağıdaki şekli elde ederiz.



Şekil 3: $hy[\theta, 3, 1, 2, 0]$

Şimdi hypotrochoid ve epitrochoid arasındaki ilişkileri bir teoremle ifade edelim.

Teorem 1: Eger n ve m aralarında asal $(n, m) = 1$, $n > 0$, $m > 0$, ve $\tau = t^{-1}$ ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $hymap[t, n, -m, r, a] = epmap[\tau, n, m, r, a],$

(ii) $hymap[t, -n, m, r, a] = epmap[\tau, n, m, r, a + \pi].$

İspat. n ve m aralarında asal, $n > 0$, $m > 0$ ve $\tau = t^{-1}$ olsun.

(i) (1) kullanarak,

$$\begin{aligned} \text{hymap}[t, n, -m, r, a] &= [(n+m)t^{\frac{-m}{n+m}} + \frac{-d}{t}]e^{ia} \\ &= [(n+m)\tau^{\frac{m}{n+m}} - d\tau]e^{ia} \\ &= \text{epmap}[\tau, n, m, r, a]. \end{aligned}$$

(ii) (1) kullanarak,

$$\begin{aligned} \text{hymap}[t, -n, m, r, a] &= [(-n-m)t^{\frac{-m}{-n-m}} + \frac{d}{t}]e^{ia} \\ &= -[(n+m)t^{\frac{m}{n+m}} - \frac{d}{t}]e^{ia} \\ &= -[(n+m)\tau^{\frac{m}{n+m}} - d\tau]e^{ia} \\ &= e^{i\pi}[(n+m)\tau^{\frac{m}{n+m}} - d\tau]e^{ia} \\ &= [(n+m)\tau^{\frac{m}{n+m}} - d\tau]e^{i(a+\pi)} \\ &= \text{epmap}[\tau, n, m, r, a + \pi]. \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir.

Şimdi ise n ve m 'in aralarında asal olmaması durumuna karşılık aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2: n ve m sıfırdan farklı birer tamsayı ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $\text{epmap}[t, n, m, r, a] = r \text{hymap}[\tau, n, n+m, \frac{1}{r}, a]$, burada $\tau = t^{-\frac{m}{n+m}}$.

(ii) $\text{hymap}[t, n, m, r, a] = r \text{epmap}[\tau, n, m-n, \frac{1}{r}, a]$, burada $\tau = t^{\frac{m}{m-n}}$.

Proof. (i) $\text{epmap}[t, n, m, r, a] = ((n+m)t^{\frac{m}{n+m}} - rmt)e^{ia}$, $\tau = t^{-\frac{m}{n+m}}$ ve $t = \tau^{-\frac{n+m}{m}}$ olsun.

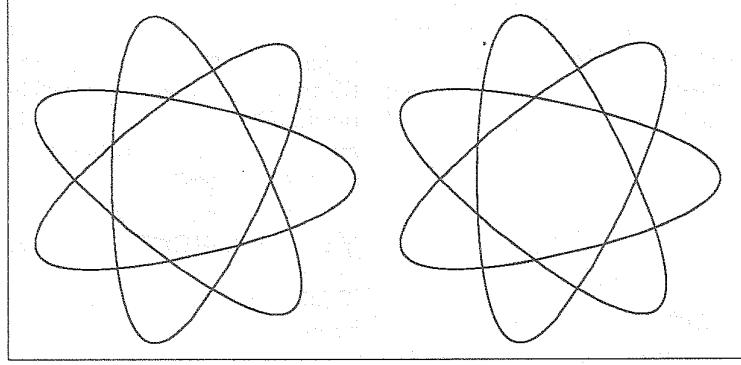
$$\begin{aligned} \text{epmap}[t, n, m, r, a] &= [(n+m)t^{\frac{m}{n+m}} - rmt]e^{ia} \\ &= r[(n+m) \frac{1}{r} t^{\frac{m}{n+m}} - mt]e^{ia} \\ &= r[(n - (n+m))t + \frac{\frac{1}{r}}{t^{\frac{n-(n+m)}{n+m}}}(n+m)]e^{ia} \\ &= r[n - (n-m)\tau^{\frac{n+m}{n-(n+m)}} + \frac{(n+m)\frac{1}{r}}{\tau}]e^{ia} \\ &= r \text{hymap}[\tau, n, m+n, \frac{1}{r}, a] \end{aligned}$$

(ii) $\text{hymap}[t, n, m, r, a] = [(n-m)t^{\frac{m}{m-n}} + \frac{rm}{t}]e^{ia}$, $\tau = t^{\frac{m}{m-n}}$ ve $t = \tau^{\frac{m-n}{m}}$ olsun.

$$\begin{aligned} \text{hymap}[t, n, m, r, a] &= [(n-m)t^{\frac{m}{m-n}} + \frac{rm}{t}]e^{ia} \\ &= r[\frac{(n-m)}{r} t^{\frac{m}{m-n}} + \frac{m}{t}]e^{ia} \\ &= r[\frac{n+(m-n)}{t} - \frac{(m-n)}{r} t^{\frac{m}{m-n}}]e^{ia} \\ &= r[\frac{n+(m-n)}{t} - (m-n) \frac{1}{r} t^{\frac{n+(m-n)}{m-n}}]e^{ia} \\ &= r[n + (n-m)\tau^{\frac{m-n}{m}} - (m-n) \frac{1}{r} \tau]e^{ia} \\ &= r \text{epmap}[\tau, n, m-n, 1/r, a]. \end{aligned}$$

Şimdi Teorem 2'ye bir örnek verelim.

Örnek 2: $hymap[t, 7, 3, 1/2, 0]$ and $1/2 epmap[\tau, 7, -4, 2, 0]$ denklemlerini alalım. Buna göre $n=7$, $m=3$, $r=1/2$, $a=0$. $hymap$ ve $epmap$ 'in grafiği tamamen birbirinin aynısıdır:



Şekil 4: $hymap[t, 7, 3, 1/2, 0] = \frac{1}{2} epmap[\tau, 7, -4, 2, 0]$

Sonuç: Dönen uzaylara hypocycloid ve epicycloid eğrileri denir. Hypocycloid ve epicycloid farklı iki denklemlerle ifade edilir. Hypocycloid'de iki çember iç içe içten birbirlerine teğet olmasına karşın epicycloid'de iki çember dıştan birbirlerine teğettirler. Kutupsal koordinat sisteminde verilen bir parametrik eğrisi hypocycloid ve epicycloid cinsinden ifade edilebilir. Teorem 1 ve 2 ve Örnek 1 ve 2'de hypocycloid ve epicycloid'in arasındaki ilişki kısaca açıklanmıştır. 1900'lü yıllarda W. F. Rigge çeşitli kapalı, sınırlı eğrilerin var olduğunu göstermiştir. Onun çalışmalarını R.E. Moritz'in mekanik makinalar yardımı ile dönen uzaylara benzeyen eğrilerin çizilebileceğine dair çalışmaları takip etmiştir. 1992 yılında L.M.Hall Mathematica yazılımını kullanarak dönen uzayları çizmiştir.

Problem: Birbirine içten teğet olan iki çemberin birinin yarıçapı diğerinin iki katı olsun. İçten teğet olan çember üzerinde alınan bir noktanın hypocycloid eğrisini çiziniz?

KAYNAKÇA

- [1] Carver, Walter B., The conjugate system for plane Euclidean geometry, *American Mathematical Monthly* 63, 1956.
- [2] Hall, Leon M., Trochoids, roses, and thorns-beyond the Spirograph, *The College Mathematics Journal* 23 (1992), 20-35.
- [3] Moritz, R. E., On the construction of certain curves given in polar coordinates, *American Mathematical Monthly* 24 (1917) 213-220.
- [4] Rigge, William F., A compound harmonic motion machine I, II, *Scientific American Supplement* 2197, 2198 (1918) 88-91, 108-110.
- [5] Rigge, William F., Cuspidal rosettes, *American Mathematical Monthly* 26 (1919) 332-340.
- [6] Rigge, William F., Envelope rosettes, *American Mathematical Monthly* 27 (1920) 151-157.

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

- Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 15 Kasım 2002 tarihine kadar gönderiniz.

Açıklama: Yarışma Sorularının doğru çözümlerini gönderenlerin isimleri dergide belirtilecektir.

- 2002 senesi boyunca en fazla doğru çözüm gönderenler arasından en az ilk 3 kişiye ödül olarak Matematik Dünyası 2003 yılı aboneliği ve yazarların imzası ile Matematik kitapları verilecektir.

ALİŞTİRMA PROBLEMLERİ

A.261. Tam m tane sıfırla biten bir faktoriyel bulduğu, fakat tam $m - 1$ tane sıfırla biten faktoriyel bulunmadığı bilinir. Tam $m + 1$ tane sıfırla biten bir faktoriyel bulunur mu?

A.262. Eşkenar $\triangle ABC$ üçgeninin çevrel çemberinin (küçük) AB yayı üzerinde bir X noktası alınmıştır, $|AX| + |BX| = |CX|$ olduğunu gösteriniz.

A.263. $1gr, 2gr, \dots, 19gr$ olan ağırlıkların $9'u$ gümüşten, $9'u$ bronzdan, biri de altından yapılmış. Bronzların toplam ağırlığı gümüşlerin toplam ağırlığından 90 gr daha fazla olduğuna göre altın olan ağırlık kaç gramdır?

A.264. Herhangi 4 rakam verilmiştir. Bu sayıları, aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde, karelere yerleştirilebileceğini gösteriniz:

A.265. Temel, basamakları toplamı ile toplandığında 2002 'yi veren bir pozitif tam sayı

$$0 < \square + \square - \square - \square < 9$$

bulduğunu İdris'e açıkladı. İdris de, basamakları toplamı ile farkını 2002 'ye eşit olan bir pozitif tam sayı bulduğunu açıkladı. Temel, biraz düşündükten sonra böyle bir sayının bulunmadığını söyledi. Temel haklı mı? Temel'in sayısını bulunuz?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.261. Küpleri toplamı 2002 olan iki tam sayı bulunur mu?

Y.262. $ABCDE$ dışbükey beşgeninde BE ve CE köşegenleri sırasıyla \widehat{ABC} ve \widehat{BCD} açılarının açıortaylarıdır. $m(\widehat{EAB}) = 35^\circ$, $m(\widehat{CDE}) = 145^\circ$ ve $\triangle BCE$ üçgeninin alanı 11 'dir. $ABCDE$ beşgeninin alanını bulunuz.

Y.263. 1 'den 121 'e kadar olan pozitif tam sayılar, 11×11 boyutlu tabloyu aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde yazılabilir mi?

a) aralarındaki fark 1 'e eşit olan sayılar komşu (ortak kenarları bulunan) karelere yazılacak;

b) tüm tam kareler aynı sütunda bulunacak.

Y.264. a, b pozitif tam sayıları için $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > 0$ sağlanıyorsa, $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > \frac{1}{4ab}$ olduğunu gösteriniz.

Y.265. Her iki komşu sayıdan büyüğü küçüğüne bölündüğünde bir asal sayı elde edilecek şekilde, çember boyunca birbirinden farklı 2003 tane pozitif tam sayı yazılabilir mi?

ÇÖZÜMLER

A.251. 2002^{2002} sayısının son iki basamağını bulunuz.

Çözüm. $\phi(25) = 5^2 - 5 = 20$ olduğundan, Euler teoreminden $20^{20} \equiv 1 \pmod{25}$ elde ederiz. Dolayısıyla

$$2002^{2002} \equiv 2^{2002} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{25}$$

$$2002^{2002} \equiv 0 \pmod{4}$$