HERHANGİ BOYUTLU SATRANÇ TAHTASININ KAPLANABİLMESİ ÜZERİNE

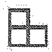
Metin Barış
Özel Ege Lisesi, İZMİR

Konunun Özeti

Bu projede n x m'lik bir satranç tahtasının, en fazla bir □ veya □□ ve istenilen sayıda  kullanılarak kaplanabilmesi problemi incelenmiştir. n ve m'in 1 ve 3'ten farklı olduğu tüm durumlarda ve n – 3, m bir çift sayı olduğu durumda, böyle bir kaplamanın mümkün olduğu gösterilmiştir. Ayrıca n – 3 ve m bir tek sayı olması halinde böyle bir kaplamanın mümkün olmayacağı kanıtlanmıştır.

Giriş

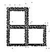
Aşağıdaki soru 1998 yılı TÜBİTAK Ulusal Matematik Olimpiyadı birinci aşama sınavında önerilmiştir.

Soru: □ Birim kareyi göstermek üzere, istenilen sayıda  ve en çok bir tane □ kullanılarak aşağıdaki n tam sayılarından hangisi için nxn'lik bir satranç tahtası kaplanamaz?

A) 100 B) 99 C) 98 D) 97 E) 96

Projenin sonucu olarak, verilen şıkların hiçbirinin doğru olmadığını göreceğiz. Şimdi bu soruyu genel şekilde ifade ederek inceleyelim:

n x m'lik bir satranç tahtasında n x m sayıda kare bulunduğundan n x m $\equiv$ 2 (mod 3) durumunda soruda verilen koşullar sağlanacak şekilde satranç tahtasının kaplanması mümkün değildir. Bunun için bir □□ eklememiz gerekmektedir. Diğer durumlarda kullanamayacağımızdan (Örneğin, nxn durumunda $n^2 \not\equiv 2$ (mod 3) olduğundan kull□□amaz), bu problemin genelliğini bozmaz.

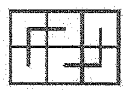
Tanım: n x m'lik bir satranç tahtası en fazla bir □ veya bir □□ ve istenilen sayıda  kullanılarak kaplanabilirse, "n x m'lik tahta kaplanabilir" diyeceğiz.

Problem: n ve m pozitif tam sayılarının hangi değerlerinde n x m' lik satranç tahtası kaplanabilir?

Projede bu problemin tam çözümünü veriyoruz.

Esas Sonuçlar

Lemma 1: n ve m sayılarından biri 3'ün, diğeri de 2'nin katı ise, n x m'lik tahta kaplanabilir.

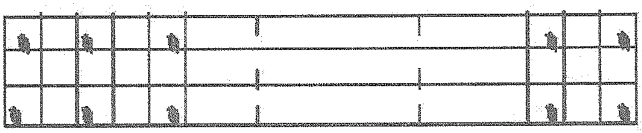
Kanıt: 2 x 3'lük (ve aynı şekilde 3 x 2'lik) tahta  şeklinde kaplanabilir. Koşulları sağlayan satranç tahtası böyle tahtalara bölünerek kaplanabilir.

Lemma 2: 6 x m (ve dolayısıyla m x 6)'lık tahta her m > 1 için kaplanabilir.

Kanıt: m > 1 sayısı ya çifttir ve Lemma 1'den dolayı kaplanabilir, ya da tek'tir ve k– (m-3) / 2 olmak üzere m – 3 + 2k şeklinde yazılabilir. O halde 6 x m'lik tahtayı 6 x 3 ve 6 x (2k)'lık iki tahtaya bölerek Lemma 1'i uygularız.

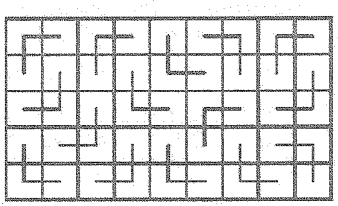
Lemma 3: 3 x m'lik (m x 3'lük) bir satranç tahtası m'in çift değerlerinde kaplanabilir; m'in tek değerlerinde kaplanamaz.

Kanıt: Çift m'ler için 3 x m'lik tahta Lemma 1'den dolayı kaplanabilir. m'in tek değerlerinde şekildeki gibi m + 1 tane hane işaretleyelim:



Bir tane  en fazla bir tane işaretli haneyi kapatabilir. 3 x m ≡ 0 (mod 3) olduğundan,  ve  kullanılamayacak. Dolayısıyla tahtayı kaplamak için en az m + 1 tane  gerekmektedir. Tahta üzerinde 3m tane hane bulunduğundan bu imkansızdır.

Lemma 4: 9 x m'lik (m x 9'luk) tahta m – 1 ve m – 3 değerlerinde kaplanamaz; diğer m'ler için kaplanabilir.
Kanıt: m – 1 değerinde tahtanın kaplanamayacağı açıktır. m – 3 durumunu Lemma 3'te inceledik. 9 x 5'lik tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir.

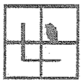
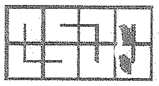


Çift m'ler için tahta, Lemma 1'den dolayı kaplanabilir. m > 5 tek sayısı için, k – (m –5) / 2 olmak üzere m – 5 + 2k şeklinde yazılabildiğinden, 9 x m'lik tahta, 9 x (2k)'lık ve 9 x 5' lik iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.

Lemma 5: n x m' lik satranç tahtası:
1) n – 1 durumunda sadece m – 1 ve m – 2 için kaplanabilir.
2) n – 2 durumunda tüm m'ler için kaplanabilir.
3) n – 4 durumunda her m ≥ 2 için kaplanabilir.
4) n – 5 durumunda m – 1 ve m – 3 için kaplanamaz, diğer m'ler için kaplanabilir.

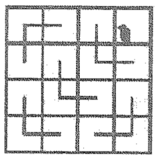
Kanıt:

1. Açıktır.
2. $m = 1$ durumu açıktır. $m = 2$ ve $m = 4$ için tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir.

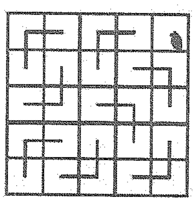
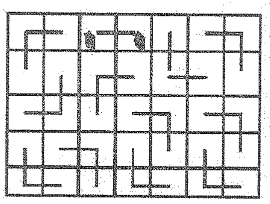
- $m \equiv 0 \pmod 3$ durumu Lemma 1'den elde edilir.
- $m \equiv 1 \pmod 3$, $m \geq 7$ için, $k = (m-4)/3$ olmak üzere, $m = 4 + 3k$ şeklinde yazılarak, 2 x m'lik tahta, 2 x 4'lük ve 2 x (3k)'lık iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.
- $m \equiv 2 \pmod 3$ için, $k = (m-2)/3$ olmak üzere, $m = 2 + 3k$ şeklinde yazılabilir. O halde 2 x m'lik tahta, 2 x 2'lik ve 2 x (3k)'lık iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.

3. $m \geq 4$ durumunu incelememiz yeterlidir. $m = 4$ için tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir:



- $m \equiv 1 \pmod 3$, $m \geq 7$ için, $k = (m-4)/3$ olmak üzere, $m = 4 + 3k$ olduğundan, 4 x m'lik tahta, 4 x 4'lük ve 4 x (3k)'lık iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.
- $m \equiv 2 \pmod 3$, $m \geq 5$ için, $k = (m-2)/3$ olmak üzere, $m = 2 + 3k$ şeklinde gösterilebildiğinden, 4 x m'lik tahta, 4 x 2'lik ve 4 x (3k)'lık iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.

4. $m \geq 5$ alabiliriz. $m = 5$ ve $m = 7$ için tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir:

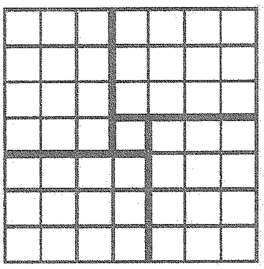
- $m \equiv 0 \pmod 6$ ise, tahta, 5 x 6'lık tahtalara bölünerek, Lemma 2'den dolayı kaplanabilir.
- $m \equiv 3 \pmod 6$ ise, $k = (m-9)/6$ olmak üzere, $m = 9 + 6k$ şeklinde yazılabilir. O halde ; 5 x m'lik tahta 5 x 9'luk ve 5 x 6'lık tahtalara bölünerek kaplanabilir.
- $m \equiv 1 \pmod 6$, $m \geq 13$ ise, $m = 7 + 6k$ şeklinde gösterilebilir, tahta, 5 x 7'lik ve 5 x 6'lık tahtalara bölünerek, kaplanabilir.

- $m \equiv 4 \pmod 6$, $m \geq 10$ ise, $m = 4 + 6k$ şeklinde yazılabilir.

O halde ; Tahta bir tane 5 x 4'lük tahta ve 5 x 6'lık tahtalara bölünerek, kaplanabilir.
$m \equiv 2 \pmod 6$, $m \geq 8$ ise, $m = 2 + 6k$ şeklinde yazıp, tahtayı bölerek kaplayabiliriz.

$m \equiv 5 \pmod 6$, $m \geq 11$ ise, $m - 5 + 6k$ şeklinde yazarak tahtayı kaplayabiliriz.

5. $m \geq 7$ alabiliriz. $m - 7$ durumunda 7×7'lik tahtayı aşağıdaki şekilde 2 tane 4×3'lük, 2 tane 3×4'lük ve bir tane 1×1'lik tahtaya bölerek kaplayabiliriz.



* $m \equiv 0 \pmod 6$ ise, $m - 6k$ ve $m \equiv 3 \pmod 6$; $m \geq 9$ ise, $m - 9 + 6k$ şeklinde yazıp Lemma 2 ve Lemma 4'ü kullanırız.
* $m \equiv 1 \pmod 6$, $m \geq 13$ ise, $m - 7 + 6k$; $m \equiv 2 \pmod 6$ ise, $m - 2 + 6k$; $m \equiv 4 \pmod 6$ ise, $m - 4 + 6k$; $m \equiv 5 \pmod 6$ ise, $m - 5 + 6k$ şeklinde yazarak Lemma 2'yi kullanırız.

Teorem : $n \times m$'lik bir satranç tahtası:
1) n ve m pozitif tam sayılarından biri 1 olup, diğeri 1 ve 2'den farklı olduğu;
2) n ve m sayılarından biri 3, diğeri tek sayı olduğu durumlarda kaplanamaz.

Diğer durumlarda tahta kaplanabilir.

Kanıt: Lemma 5(1) ve Lemma 3'ten dolayı m ve n'in 1 ve 3'ten farklı değerlerinin incelenmesi yeterlidir.

- $n \equiv 3 \pmod 6$; $n \neq 3$ ise, $n - 9 + 6s$ şeklinde yazılabilir, dolayısıyla Lemma 2 ve Lemma 4'ü kullanarak tahtayı kaplayabiliriz.
- $n \equiv 1 \pmod 6$, $n \neq 1$ ise, $n - 7 + 6s$ şeklinde yazıp Lemma 5(5)'i kullanarak tahtayı kaplayabiliriz.
- $a - 2$, 4 veya 5 olmak üzere, $n \equiv a \pmod 6$ ise, $n - a + 6s$ şeklinde yazarak Lemma 5'in sırasıyla 2), 3), 4) şıklarını kullanırız.
- $n \equiv 0 \pmod 6$ için Lemma 2'yi kullanırız.

SONUÇ ; $n \times n$'lik BİR SATRANÇ TAHTASI SADECE $n - 3$ DEĞERİ İÇİN KAPLANAMAZ. BÖYLECE ; PROJENİN BAŞINDA VERDİĞİMİZ SORUDA **HİÇBİR ŞIK DOĞRU DEĞİLDİR.**

---

* Bu çalışma TÜBİTAK 2002 yılı liseler arası araştırma proje yarışmasında bronz madalya almıştır. Metin Barışı ve emeği geçen danışman öğretmenlerini kutluyoruz. (MD)