BİR SAYILAR TEORİSİ SORUSUNUN GENELLEŞTİRİLMESİ VE BU GENELLEŞTİRMEYE UYGUN POLİNOMLARIN BULUNMASI

Ali Adalı
İzmir Özel Yamanlar Lisesi

GİRİŞ: $1,2,3,...$ dizisinde, ilk terimden başlayarak '+' ve '−' işaretlerini uygun koyup topladığımızda herhangi bir k doğal sayısını şu şekilde elde edebiliyoruz:

$$k = -1+2-3+...-(2k-1)+2k.$$

Ayrıca '+' ve '−' 'lerin yerini değiştirdiğimizde -k sayısını da elde edebiliyoruz. Bu şekilde tüm tamsayıları elde edebiliriz.

Aynı işlemi $1^2, 2^2, 3^2, ...$ dizisinde de uyguladığımızda uygun '−' ve '+' işaretleri seçimi ile her k tamsayısını elde edebiliyoruz.

Her n doğal sayısı için $1^n, 2^n, 3^n, ...$ dizisinin de uygun '−' ve '+' seçimleri için her k tamsayısını bu terimlerin toplamı şeklinde elde edebilir miyiz?

Acaba dizi, verilen tamsayı katsayılı bir P polinomu için,

$$P(1), P(2), P(3), ...$$

dizisi olsa; ilk terimden itibaren dizinin terimlerinin önlerine uygun '−' veya '+' işaretleri yazıp topladığımızda hangi tamsayıları elde edebiliriz? Veya hangi tamsayı katsayılı P polinomları için tüm tamsayılar bu şekilde gösterilebilir?

AMAÇ: $P(1), P(2), P(3), ...$ dizisinde her n tamsayısı için, '+' ve '−' 'lerin uygun seçiminde

$$n = \pm P(1) \pm P(2) \pm ... \pm P(k)$$

olacak şekilde bir k doğal sayısının varlığını garantilemek için tamsayı katsayılı P polinomunun hangi şartları sağlaması gerekir? Amacımız P polinomlarını incelemek ve bu polinomlar hakkında belirli koşullar elde etmek. Sonuç kısmında da görülebileceği gibi polinomun yukarıdaki şartı sağlayıp sağlamadığını incelemek için polinomun belli değerlerini incelememiz yeteli olacaktır.

YÖNTEM: ***İddia 1:*** Her n pozitif tamsayısı için öyle bir k vardır ki; '+' veya '−' 'lerin uygun seçimi için,

$$n = 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm ... \pm k^2$$

şartı sağlansın.

Yöntem: (Kaynak: 250 Problems in Elementary Number Theory, W. Sierpinski) Yukarıdaki iddiada her i^2 'li terim yerine $P(i)$ yazıp, hangi tamsayı katsayılı P polinomlarının şartı sağladığını inceleyelim.

Lemma 1: Derecesi $n \geq 1$ olan bir P polinomu ve k sabit sayısı için,

$$P(x+k) - P(x)$$

polinomu (n-1). derecedendir.

Yöntem: $P(x+k) - P(x)$ olinomu $(n-1)$. derecedendir.

$$P_i(x) = P_{i-1}(x + 2^{i-1}) - P_{i-1}(x),$$

$i = 1, 2, ..., n-1$ için, $P_{i+1}(x)$ polinomunun derecesi $P_i(x)$ polinomunun derecesinden bir fazladır. Öyle ise; $P_n(x)$ sabittir.

Tanım: $k_1 < k_2$ tamsayıları için, $A_{(k_1,k_2)}$ ile,

$$\pm P(k_1) \pm P(k_1+1) \pm ... \pm P(k_2)$$

ifadesindeki $\pm$ işaretlerinin değiştirilmesiyle oluşacak toplamların oluşturduğu $2^{k_2-k_1+1}$ elemanlı kümeyi gösterelim.

Lemma 2: Her x tamsayısı için öyle bir y tamsayısı vardır ki; $P_n(0) \in A_{(x,y)}$. $P_n(x) \in A_{(x,x+2^n-1)}$ olduğu açıktır ($P_n(x); P(x), P(x+1), ..., P(x+2^{n-1}-1)$ değerlerinin önlerine '+' veya '−' yazılarak elde ediliyor ve $P_n(x)$ sabit).

Lemma 3: a tamsayısı, x ve y_1 tamsayı olmak üzere;$A_{(x,y_1)}$ kümesinin elemanı olsun.

$$b \equiv a \ \ (mod \ \ P_n(0))$$

ise öyle bir y_2 tamsayısı vardır ki; $b \in A_{(x,y_2)}$ ($P_n(x)$ sabit olduğu için yerine $P_n(0)$ yazıldı).

Yöntem:

$$b = a + kP_n(0)$$

olsun. $k \in \mathbb{Z}$, $a \in A_{(x,y_1)}$, $a \pm P_n(0) \in A_{(x,y_2)}$ aynı işlemi k defa uygularsak;

$$\Rightarrow \pm kP_n(0) \in A_{(x,z)}.$$

Fikir: P tamsayı katsayılı olduğu için,

$$P(x + P_n(0)) \equiv P(x) \ \ (mod \ \ P_n(0)) \ \ (Bezout \ Teo.)$$

Öyleyse, her tamsayı x için $P(x)$ değeri $(mod \ \ P_n(0))$'da, $P(1), P(2), ..., P(P_n(0))$ değerlerinden birine denk olacak. $A_{(x,y)}$ kümesindeki elemanları $(mod \ \ P_n(0))$'da düşünmemiz uygun.

İddia 2: Öyle bir x_1 doğal sayısı ve her $i = 1, 2, ..., P_n(0)$ için, öyle tamsayı s_i vardır ki;

$$s_i \in A_{(1,x_1)} \ \ ve \ \ s_i \equiv 2P(i) \ \ (mod \ \ P_n(0)).$$

Yöntem:

$$k = P(1) + P(2) + ... + P(P_n(0)) \in A_{(1,P(P_n(0)))}$$

Bezout teoreminden dolayı,

$$P(x + P_n(0)) \equiv P(x) \ \ (mod \ \ P_n(0)),$$

$c_i = P(1+P_n(0))+P(2+P_n(0))+...+P(i-1+P_n(0))-P(i+P_n(0))+P(i+1+Pn(0))+...+P(2P_n(0)) \in A_{(P(P_n(0)+1),2P(P_n(0)))}$,

$$\Rightarrow k - c_i \in A_{(1,2P_n(0))}.$$

$$\Rightarrow k - c_i \equiv 2P(i) \ \ (mod \ \ P_n(0)).$$

İddia 3: Her k pozitif tamsayısı için öyle x_k tamsayısı ve her $i = 1, 2, ..., P_n(0)$ için öyle bir s_i vardır ki;

$$s_i \in A_{(1,x_k)} \ \ ve \ \ s_i \equiv 2kP(i) \ \ (mod \ \ P_n(0)).$$

Yöntem: İddia 3 teki adımı $P(i)$ için k defa uygulamamız yeterli.

İddia 4: Her $k_1, k_2, ..., k_{P_n(0)}$ tamsayıları için öyle bir x tamsayısı ve $s \in A_{(1,x)}$ olan bir s vardır ki;

$$s \equiv 2k_1P(1) + 2k_2P(2) + ... + 2k_{P_n(0)}P(P_n(0)) \ \ (mod \ \ P_n(0)).$$

Yöntem: İddia 3'teki adımı sırasıyla $P(i)$ için k_i defa uygulamamız yeterli

$$obeb(P(1), P(2), ..., P(P_n(0)), P_n(0)) = d$$

olsun. $d > 1$ olursa;
$A_{(x,y)}$ kümesindeki sayılar d ile bölünür. d ile bölünmeyen sayılar elde edilemez. Buna göre; tüm tamsayıları elde etmemiz için $d = 1$ olmalıdır. .... (♣)

Lemma 4:

$$a_1, a_2, ..., a_N \in \mathbb{Z}^+_* \ (N \geq 2) \ \ ve \ \ obeb(a_1, a_2, ..., a_N) = 1$$

ifadeleri ancak ve ancak

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + ... + a_N k_N = 1$$

olacak şekilde $k_1, k_2, ..., k_N \in \mathbb{Z}$ varsa doğrudur.

Yöntem:

$$(a_1, a_2) = 1 \Leftrightarrow a_1 k_1 + a_2 k_2 = 1$$

olacak şekilde tamsayı k_1 ve k_2 olduğu açık ([1], s. 5, Teorem 8).
Basit bir tümevarımla lemmayı ispatlamak mümkün.
Öyle ise; (Lemma 3'ten dolayı) öyle bir x değeri vardır ki; her t tamsayısı için, $A_{(1,x)}$ kümesinde $2t$ bulunur.

Sonuç: Tüm çift sayıları bu şekilde elde edebiliriz. Şimdi tek sayıları elde etmeye çalışalım:
(i) $P_n(0)$ tekse;

$$P_n(0) = 2c + 1, \ \ c \in \mathbb{Z}.$$

Sonuçtan dolayı herhangi bir n tamsayısı için öyle bir x var ki $2(n + c + 1) \in A_{(1,x)}$ ve $P_n(0)$ tekse $2n + 1 \in A_{(1,y)}$ olan y olduğu açık.
$\Rightarrow P_n(0)$ tekse; tek sayılar bu şekilde elde edilebiliyor.
(ii) $P_n(0)$ çiftse;

$$P(1), P(2), ..., P(P_n(0))$$

dizisindeki ilk tek terim $P(i)$ yi alıp incelediğimizde Lemma 3'ün sonucu olarak öyle bir tamsayı x vardır ki; her n tamsayısı için,

$$2n + 1 \in A_{(1,x)}$$

$\Rightarrow P_n(0)$ çiftse; tek sayılar da bu şekilde elde edilir.
Sonuç: Görüldüğü gibi her n tamsayısı için, öyle bir x vardır ki;

$$n \in A_{(1,x)} \Leftrightarrow obeb(P(1), P(2), ..., P(P_n(0)), P_n(0)) = 1.$$

İddia 5:

$$obeb(P(1), P(2), ..., P(P_n(0)), P_n(0)) = 1 \Leftrightarrow obeb(P(1), P(2), ..., P(n + 1)) = 1.$$

Yöntem:

$$P_n(0) \neq 0 \ \ ve \ \ 2^{n-1} | P_n(0) \ \ (Bezout \ \ Teo.) \Rightarrow P_n(0) \geq 2^{n-1}.$$

$(\Leftarrow)$ $P_n(0) \geq 2^{n-1} \geq n + 1$. Bu yüzden,

$$(P(1), P(2), ..., P(P_n(0)), P_n(0)) = 1 \Rightarrow$$

$$(P(1), P(2), ..., P(n + 1)) = 1$$

$(\Rightarrow)$ $(P(1), P(2), ..., P(n + 1)) = d$ olsun. Lagrange interpolasyonun'dan dolayı,

$$d|P(1), d|P(2), ..., d|P(n + 1) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, \ \ d|P(x)$$

olur.

$$d|P(1), d|P(2), ..., d|P(P_n(0)) \ \ ve \ \ d|P_n(0)$$

ise;

$$d|(P(1), P(2), ..., P(P_n(0)), P_n(0)) = 1 \Rightarrow d|1 \Rightarrow d = 1.$$

$n = 0, 1, 2$ durumlarının incelenmesi kolay olup ilgilenenlerin uğraşına bırakılmıştır.

EKLER: P polinomu tamsayı katsayılıdır dolayısıyla tam değerli bir polinomdur (yani her tamsayıda tamsayı değeri alır) ise öyle $l_0, l_1, ..., l_n$ tamsayıları vardır ki;

$$P(x) = l_0 + l_1 x + l_2 \frac{x(x+1)}{2} + ... + l_n \frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}$$

(P polinomunun derecesi n idi) ([2], 319. Soru ve çözümü)

İddia 6:

$$(l_0, l_1, ..., l_n) = 1 \Leftrightarrow (P(1), P(2), ..., P(n+1)) = 1.$$

Yöntem: $(l_0, l_1, ..., l_n) | P(1), P(2), ..., P(n+1))$ *ve* $P(1), P(2), ..., P(n+1)) | (l_0, l_1, ..., l_n)$. Bunun doğal bir sonucu olarak P polinomu, bir c tamsayı değeri için

$$P(c) = \pm 1$$

oluyorsa; bu polinomla her k tamsayısı için $k \in A_{(1,x)}$ olan bir x vardır (yani bu polinomla tüm tamsayılar elde edilebiliyor).

Örnek: $P(x) = x, P(x) = x^2, P(x) = x^n, P(x) = x^n + 1, P(x) = x^n - 1, P(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n, P(x) = xQ(x) + 1$ (Q tamsayı katsayılı bir polinom).

SONUÇ VE TARTIŞMA: P tamsayı katsayılı bir polinom olmak üzere her N tamsayısı için, $'+'$ ve $'-'$ 'lerin uygun seçiminde, $N = \pm P(1) \pm P(2) \pm ... \pm P(k)$ şartını sağlayan bir k doğal sayısı bulunabiliyorsa; P polinomuna *"uygun polinom"* diyelim. n, P polinomunun derecesi olmak üzere; sonuç olarak elde ettiğimiz teoremler:

Teorem 1. P uygun bir polinomdur. $\Leftrightarrow$ $obeb(P(1), P(2), ..., P(n+1)) = 1$

Teorem 2.

$$l_0, l_1, ..., l_n \in \mathbb{Z} \;\; ve \;\; P(x) = l_0 + l_1 x + l_2 \frac{x(x+1)}{2} + ... + l_n \frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!}$$

olmak üzere;

$$P \text{ uygun bir polinomdur. } \Leftrightarrow obeb(l_0, l_1, ..., l_n) = 1.$$

Teorem 3.

$$obeb(P(1), P(2), ..., P(n+1)) = obeb(l_0, l_1, ..., l_n).$$

Teorem 4.

$$obeb(P(1), P(2), ..., P(n+1)) = d \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, d | P(x).$$

Teorem 5. $P(x) = 1, P(x) = x, P(x) = x^2, P(x) = x^2 \pm 1, P(x) = x^n, P(x) = x^n \pm 1, P(x) = x^n \pm x^n - 1 + ... + x + 1, P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x \pm 1 (a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z})$ polinomları uygun polinomlardır.

Teorem 6. $c \in \mathbb{Z}$ ve $P(c) = \pm 1$ olan bir c varsa P uygun bir polinomdur.

Teorem 7.

$$obeb(P(1), P(2), ..., P(n+1)) = d$$

ise; P polinomu d ile bölünen tamsayılarda uygun bir polinomdur. Yani P polinomu ile d ile bölünen tüm tamsayıları elde edebiliriz.

Teorem 8. P tamsayı katsayılı polinom olmak üzere; $'+'$ ve $'-'$ 'lerin uygun seçiminde

$$N = \pm P(1) \pm P(2) \pm ... \pm P(k)$$

olan en az bir k doğal sayısı ancak ve ancak sonsuz çoklukta böyle k doğal sayıları varsa vardır.

Teorem 9. $N \geq 2$ olmak üzere; $a_1, a_2, ..., a_N \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$obeb(a_1, a_2, ..., a_N) = 1 \Leftrightarrow \exists k_1, k_2, ..., k_N \in \mathbb{Z} : a_1k_1 + a_2k_2 + ... + a_Nk_N = 1.$$

Acaba P polinomunun katsayılarına bakarak polinomun uygun olup olmadığı bulunabilir mi? İlk akla gelen fikirlerden biri katsayıların aralarında asal olmaları. Tüm tamsayıları elde etmek için bu şart gerekli, çünkü 1 elde ediliyorsa, 1; bu katsayıların ortak bölenlerinin en büyüğü ile (*obeb*) bölünmeli ve dolayısıyla katsayıların obeb'i 1 olmalıdır.

Fakat bu şart yeterli değil.

Örneğin: $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$ polinomunun katsayıları aralarında asaldır, fakat bu polinom her tamsayı x değeri için çift değerler alır. Tek sayılar bu polinomla elde edilemez.

PROJENİN GELİŞTİRİLMESİ:

Polinomları bir yana bırakalım. Acaba dizimizin elemanları asal sayılar olsa yine her sayıyı istenilen şekilde göstermek mümkün müdür?

Yani $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...$ dizisinin terimlerini; ilk terimden başka bir terime kadar olan asalları 1 veya -1 ile çarpıp toplayarak istenilen bir doğal sayıyı elde edebilir miyiz?

İddia: $n \geq 5$ doğal sayı olmak üzere; $p_1, p_2, ..., p_n$ ilk n asal sayı olsun.

$$S_n = \{|\sum_{i=1}^{n} a_ip_i|; a_i \in \{-1, 1\}\}, \ \ T_n = p_1 + p_2 + ... + p_n, \ \ K_n = \{T_n - 2, T_n - 8, T_n - 12\}$$

ise;

$$S_n \cap K_n = \emptyset \ \ ve \ \ S_n \cup K_n = \{0 \leq x \leq T_n | x \equiv T_n \ \ (mod \ 2)\}.$$

Yöntem: Tümevarım: $n = 5$ için, (gösterimi EKLER -2'de var.) n için iddia doğru olsun. $n + 1$ için doğruluğunu incelememiz bizi sonuca ulaştıracaktır.

Teorem: Her k tamsayısı için öyle bir n doğal sayısı vardır ki; $k \in S_n$.

Yöntem: $T_n - 12 > k \ \ ve \ \ T_n \equiv k \ \ (mod \ 2)$ olan bir n tamsayısı alırız. k sabit ve T_n ilk n asalın toplamı olduğu için böyle bir n bulmak mümkün.

Teorem: $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ilk k asal sayı olmak üzere her n doğal sayısı için, $n = a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_kp_k$ şartını sağlayan $k \in \mathbb{N}$ ve $a_i \in \{-1, 1\}$ sayıları bulunur $(i = 1, 2, ..., k)$.

EKLER-2: $p_1, p_2, ..., p_n$ ilk n asal sayı olsun. Bu sayıları 1 veya -1 ile çarpıp topladığımızda meydana gelen sayılar: $n = 5$ için:

-2-3-5-7-11=-28,
-2-3-5-7+11=-6,
⋮
+2+3+5+7+ 11=28

Oluşan küme:

$$\{0, -2, -4, -6, -8, -10, -12, -14, -18, -22, -24, -28, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 22, 24, 28\}$$

Yani -28'den 28'e kadar olan çift sayılar; $\{-16, -20, -26, 16, 20, 26\}$ hariç.

Kümenin sadece pozitif ve 0'a eşit olan elemanlarını düşünmemiz yeterli, çünkü bir sayı kümede mevcutsa negatifi de mevcut.

n = 6 için gösterilebilen sayılar:

-2+ 3-5+7+11-13=1,
+2-3-5+7-11+13=3

$\vdots$

-2+3-5+7+11+13=27
29 gösterilemez
-2-3+5+7+11+13=31
33 gösterilemez
+2-3+5+7+11+13=35
-2+3+5+7+11+13=37
39 gösterilemez
+2+3+5+7+11+13=41

1 ile 41 arasındaki tüm tek sayılar; $\{29, 33, 39\}$ hariç.

$n = 7$ için:

-2-3+5-7+11+13-17=0,
-2-3-5-7-11+13+17=2

$\vdots$

-2+3-5+7+11+13+17=44,
46 gösterilemez,
-2-3+5+7+11+13+17=48,
50 gösterilemez,
+2-3+5+7+11+13+17=52,
-2+3+5+7+11+13+17=54,
56 gösterilemez,
+2+3+5+7+11+13+17=58,
0'dan 58'e kadar olan tüm çift sayılar; $\{46, 50, 56\}$ hariç.

İlk n asal sayıyı 1 veya -1 ile çarpıp topladığımızda *mod* 2'de n'e denk olan sayıları elde edemeyiz. Çünkü, ilk asal 2; çift, kalan $n-1$ asal tektir. *mod* 2'de kontrol edilirse oluşan sayıların bu modda $n-1$ 'e denk olması gerektiği görülür. $p_1, p_2, ..., p_n$ asallarını 1 veya -1 ile çarpıp toplayarak (*mod* 2'de $n-1$'e denk olan) elde edilemeyen sayılar: ($p_1 + p_2 + ... + p_n$ 'den küçük veya eşit sayılar.)

Elde Edilemeyenler:	**Kullanılan asallar:**
n =1→ 0	2
n= 2→ 3	2,3
$\vdots$	
n=22→ 779, 783, 789	2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79

$T_n = p_1 + p_2 + ... + p_n$ dersek; $n \geq 5$ için gösterilemeyen sayılar hep $T_n - 2, T_n - 8, T_n - 12$ şeklinde.

KAYNAKLAR:

[1] Sierpinski W. , 250 Problems in Elementary Number Theory

[2] Chenstov N.N., Yaglom I.M., Shklyarsky D.O., Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematics; Arithmetic and Algebra

[3] Karakaş H.İ., Aliyev İ., Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri

[4] Karakaş H.İ., Aliyev İ., Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri

Bu projeyi hazırlamamda yardımlarını esirgemeyen Yasin Çetindil, Kazım Büyükboduk, Yusuf Aytar ve bu tür projeleri destekliyen ve teşvik eden TÜBİTAK'a, okul yöneticilerime, aileme, başta Yamanlar Matematik Olimpiyat Takımı (YMOT) olmak üzere tüm arkadaşlarıma ve okul çalışanlarına teşekkürü bir borç biliyorum.

* Bu proje 2002 TÜBİTAK lise araştırma projeleri yarışmasında gümüş madalya almıştır. Ali Adalı ve emeği geçen öğretmenlerini kutlarız (MD).