VII. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ

İlham Aliyev-Doğan Çoker
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

---

1. $\sqrt{2000^{2002}}$ sayısının onluk sayı sisteminde yazılışında sağdan sıfırdan farklı ilk rakam nedir?

A) 4 $\boxed{\text{B)}}$ 2 C) 8 D) 6 E) 5

Çözüm. $\sqrt{2000^{2002}} = 2000^{1001} = 2^{1001} \cdot 1000^{1001}$, $2^{1001} = 2 \cdot 2^{1000} = 2 \cdot 16^{250}$ ve 16 'nın her pozitif tamsayı kuvvetinin son rakamı 6 olduğundan, $2 \cdot 16^{250}$ 'nin son rakamı 2 'dir.

2. $a, b.c = a + b + c$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı a, b ve c rakamları için $a^2 + b^2 + c^2$ toplamı neye eşittir? (Burada a, b ifadesi "a tam onda b" kesrini belirtmektedir.)

A) 55 B) 70 $\boxed{\text{C)}}$ 65 D) 60 E) 75

Çözüm. Verilen eşitliği

$$10ac + bc = 10(a+b+c) \Rightarrow bc = 10(a+b+c-ac)$$

şeklinde yazalım. Buradan b ve c 'den birinin 5, diğerinin bir çift sayı olduğu görülür. $c = 5$ ise, $b = 8a - 10$ eşitliğinden $b = 6$, $a = 2$ olur. $b = 5$ ise, $c = \frac{2a+10}{2a-1} = 1 + \frac{11}{2a-1}$ eşitliğinden $2a - 1 = 11 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow c = 2$ olur. Her iki durumda da $a^2 + b^2 + c^2 = 5^2 + 2^2 + 6^2 = 65$ olur.

3. İki (farklı veya eşit) asal sayının çarpımı biçiminde gösterilebilen her sayıya "iyi sayı" diyelim. $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $n+1, n+2, \ldots, n+k$ sayılarının her biri "iyi sayı" ise, k en fazla kaç olabilir?

A) 4 $\boxed{\text{B)}}$ 3 C) 2 D) 5 E) Sonsuz

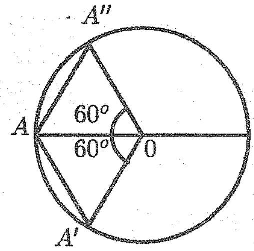
Çözüm. Dört tane ardışık sayının her biri "iyi sayı" olamaz. Çünkü dört ardışık sayıdan biri 4 'e bölüneceğinden $4k$ biçimindedir. $k = 1$ için 4, 5, 6, 7 dörtlüsünden sadece ikisi "iyidir". $k > 1$ için $4k = 2 \cdot 2 \cdot k$ sayısının en az 3 (eşit veya farklı) asal çarpanı olduğundan, bu sayı "iyi" değildir. Dolayısıyla, ardışık "iyi" sayıların sayısı 3 'ten fazla olamaz. 3 tane ardışık iyi sayıya bir örnek gösterelim:

$$33 = 3 \cdot 11, \quad 34 = 2 \cdot 17, \quad 35 = 5 \cdot 7\,.$$

4. Bir çember üzerinde sabit bir A noktası alalım. Çember üzerinde alınan bir B noktası için, AB kirişinin uzunluğunun yarıçap uzunluğundan büyük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{\pi}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{1}{3}$ $\boxed{\text{D)}}$ $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

Çözüm.



Şekilden görüldüğü gibi, B noktası $A'\overset{\frown}{A}A''$ yayı üzerinde yürüdüğü zaman AB kirişinin uzunluğu yarıçap uzunluğundan küçük olur. Bu yayın uzunluğu çember uzunluğunun $\frac{1}{3}$ 'üdür. Bundan dolayı, AB kirişinin uzunluğunun yarıçap uzunluğundan büyük olma olasılığı $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 'tür.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$(f(y))^2 = \frac{1}{2}[f(x+y^2) - f(x)]$$

eşitliğini sağlamaktadır. $f(1) \neq 0$ olduğuna göre, $f(2002)$ sayısı kaçtır?

A) 1000 B) 2001 $\boxed{\text{C)}}$ 1001
D) 2000 E) 2002

Çözüm. $x = y = 0$ koyarsak, $f(0) = 0$ olur. $x = 0$, $y = 1$ koyarsak, $f(1) = 2f^2(1)$ ve $f(1) \neq 0$ olduğundan, $f(1) = \frac{1}{2}$ olur. Şimdi, $y = 1$ koyarsak, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x)) \Rightarrow f(x+1) - f(x) =$

$\frac{1}{2}$ elde ederiz.

$$\begin{array}{lclcl} f(2) & - & f(1) & = & \frac{1}{2} \\ f(3) & - & f(2) & = & \frac{1}{2} \\ \ldots & & \ldots & & \\ f(2002) & - & f(2001) & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$f(2002) = 1001$$

olur.

6. $4^{2002} + 6^{2002}$ sayısının 25 ile bölünmesinden elde edilen kalan kaçtır?

A) 4 B) 18 C) 12 D) 24 $\boxed{\text{E)}}$ 2

Çözüm.

1.Çözüm: ϕ Euler fonksiyonu olmak üzere, $\phi(25) = 20$ 'dir. O halde, Euler Teoremine göre,

$$4^{20} = 4^{\phi(25)} \equiv 1 \ (mod\ 25)\ ,$$

$$6^{20} = 6^{\phi(25)} \equiv 1 \ (mod\ 25)$$

ve buradan da,

$4^{2002} = 4^2 \cdot 4^{2000} = 16 \cdot 4^{20 \cdot 100} \equiv 16 \ (mod\ 25)\ ,$

$6^{2002} = 4^2 \cdot 4^{20 \cdot 100} \equiv 36 \ (mod\ 25) \equiv 11 \ (mod\ 25)\ .$

Bu ikisinden $4^{2002} + 6^{2002} \equiv 16 + 11 \ (mod\ 25) \equiv 2 \ (mod\ 25)$ elde edilir.

2.Çözüm: $4^{2002}+6^{2002} = (5-1)^{2002}+(5+1)^{2002} =$ ...(Binom Formülünü kullanıyoruz)... $= 25 \cdot A - \binom{2002}{2001} \cdot 5 \cdot 1 + 1 = 25 \cdot B + \binom{2002}{2001} \cdot 5 \cdot 1 + 1 = 25 \cdot (A+B) + 2$. Sonuncu toplam 25 ile bölününce kalan 2 'dir.

7. 50 yapraklı bir kitabın sayfaları 1, 2, 3, ... , 99, 100 sayıları ile numaralandırılmıştır. Bu kitaptan bir kaç yaprak koparılıp atıldıktan sonra, geriye kalan sayfaların numaralar toplamı 4946 olmuştur. Bu durumda, en fazla kaç yaprak koparılmıştır?

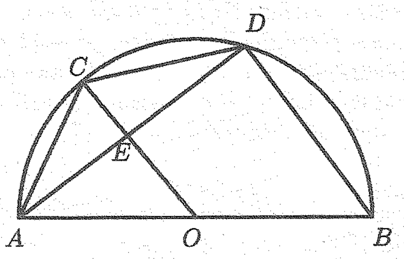
$\boxed{\text{A)}}$ 4 B) 5 C) 8 D) 7 E) 6

Çözüm. Koparılmış sayfaların numaralar toplamı $5050 - 4946 = 104$ 'tür. n numaralı yaprağın sayfa numaralarının toplamı $(2n-1) + 2n = 4n - 1$ 'dir. Bundan dolayı, k tane yaprak koparılmışsa, onların sayfa numaraları toplamı, $(4n_1 - 1) + (4n_2 - 1) + ... + (4n_k - 1) = 4(n_1 + n_2 + ... + n_k) - k$ olur. $4 \cdot (n_1 + n_2 + ... + n_k) - k = 104$ eşitliğinden, k 'nın 4 'e bölündüğünü söyleyebiliriz. Yani, $k = 4, 8, ...$ olabilir. $k \geq 8$ olamaz, çünkü $4 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8) - 8 = 4 \cdot 36 - 8 = 136 > 104$ 'tür. $k = 4$ durumuna bir örnek verelim: 1., 2., 3. ve 21. yaprak koparılmışsa, sayfa numaraları toplamı $1+2+3+4+5+6+41+42 = 104$ olur.

8. $[AB]$ doğru parçası çap olmak üzere, bir yarım çember çizilmiş ve bu yarım çember üzerinde C ve D noktaları $|AC| = |CD| = 2$ olacak biçimde alınmıştır. $|AB| = 5$ olduğuna göre, BD kirişinin uzunluğu kaçtır?

A) 3,3 B) 3,2 C) 3,1 $\boxed{\text{D)}}$ 3,4 E) 3,5

Çözüm.



$\widehat{ADB} = 90°$ olduğundan, Pisagor Teoreminden $|BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 = 25 - |AD|^2$ 'dir. $|AD|$ uzunluğunu bulalım. Çemberin merkezine O ve CO ile AD 'nin kesişim noktasına E diyelim. $CE \perp AD$ olduğu açıktır. $\widehat{CDE}$ ve $\widehat{CBA}$ aynı $\overset{\frown}{AC}$ yayını gören açılar olarak eşitler. Buna göre de $\overset{\triangle}{DCE}$ ve $\overset{\triangle}{CAB}$ dik üçgenleri benzer üçgenlerdir. Buradan, $\frac{|DE|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|BA|} \Rightarrow$

$$|DE| = |DC| \cdot \frac{|BC|}{|BA|} = 2 \cdot \frac{\sqrt{5^2-2^2}}{5} = \frac{2\sqrt{21}}{5} \Rightarrow$$

$$|AD| = 2|DE| = \frac{4}{5}\sqrt{21}$$

Sonuçta, $|BD| = \sqrt{25 - |AD|^2} = \frac{17}{5} = 3,4$ çıkar.

9. Aşağıdaki denklemin gerçel sayılarda çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

$$\left[\!\left[\frac{6x+5}{8} \right]\!\right] = \frac{15x-7}{5}$$

(Burada, $[\![.]\!]$, tamdeğer fonksiyonudur.)

A) 0 B) 1 $\boxed{\text{C)}}$ 2

D) 3 E) Sonsuz çoklukta

Çözüm. $\frac{15x-7}{5} = n$, $(n \in Z)$ diyelim. Buradan $x = \frac{5n+7}{15}$ bulunur ve denklemde yerine konulursa, $[\![\frac{10n+39}{40}]\!] = n$ olur. Tamdeğer fonksiyonunun tanımından, $0 \le \frac{10n+39}{40} - n < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{30} < n \le 1,3 \Rightarrow n = 0$ veya $n = 1$. $n = 0$ için $x_1 = \frac{7}{15}$ ve $n = 1$ için $x_2 = \frac{4}{5}$ çözümleri elde edilir.

10. Kaç tane p asal sayısı için $p^2 + 11$ sayısının tam 6 tane farklı pozitif böleni vardır?

$\boxed{\text{A)}}$ 1 B) 2 C) 3

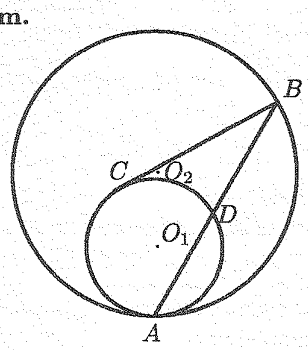
D) 12 E) Sonsuz çoklukta

Çözüm. $p = 2$ için $p^2+11 = 15$ sayısının 4 pozitif böleni vardır. $p = 3$ için $p^2 + 11 = 20$ sayısının 6 pozitif böleni vardır. Her $p \ge 5$ asal sayısı $6k \mp 1$ biçiminde gösterilebileceğinden, $p^2 + 11$ sayısı 12 'ye bölünecektir ve 12 'nin tam 6 tane pozitif böleni olduğundan, $p^2 + 11$ sayısının pozitif bölen sayısı 6 'dan fazla olacaktır.

11. Yarıçapı 5 birim olan bir çember, yarıçapı 9 birim olan bir başka çembere A noktasında içten teğettir. Büyük çember üzerinde, $|AB| = 12$ birim olacak şekilde seçilen bir B noktasından küçük çembere çizilen teğet parçasının uzunluğu nedir?

A) 11 $\boxed{\text{B)}}$ 8 C) 9 D) 10 E) 7

Çözüm.



AB 'nin küçük çemberle kesişim noktasına D diyelim. Küçük çemberin merkezine O_1 ve büyüğünkine de O_2 dersek, $\overset{\triangle}{AO_1D}$ ve $\overset{\triangle}{AO_2B}$ üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{5}{9} \Rightarrow |AD| = \frac{5}{9} \cdot |AB| = \frac{5}{9} \cdot 12 = \frac{20}{3}$. Buradan, $|BD| = |AB| - |AD| = 12 - \frac{20}{3} = \frac{16}{3}$. Şimdi, $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |BA|} = \sqrt{12 \cdot |BD|}$ eşitliğinden $|BC| = \sqrt{12 \cdot \frac{16}{3}} = 8$ olur.

12. 0, 1, 2, ... , 9999 sayıları içinde 7 ve 8 rakamlarının ikisinin de kullanıldığı kaç tane sayı vardır?

A) 982 $\boxed{\text{B)}}$ 964 C) 972

$\boxed{\text{D)}}$ 974 E) 962

Çözüm. $A = \{$yazılımında 7 kullanılan sayılar$\}$, $B = \{$yazılımında 8 kullanılan sayılar$\}$ kümelerini tanımlayalım. Biz $s(A \cap B)$ sayısını bulmak istiyoruz.

$$s(A \cap B) = s(A) + s(B) - s(A \cup B) \qquad (1)$$

formülünden yararlanacağız.

Sayıların hepsini, gerektiğinde önüne sıfırlar koymakla, dört basamaklı düşünelim. Örneğin, $0 = 0000$, $1 = 0001$, $219 = 0219$ vs. O halde,

$$s(A) = s(B) = 10^4 - 9^4 \qquad (2)$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Öte yandan, C' ile C kümesinin tümleyenini gösterirsek,

$$s(A \cup B) = 10^4 - s((A \cup B)') = 10^4 - 8^4 \qquad (3)$$

olur. (2) ve (3) 'ü (1) 'de koyarsak, $s(A \cap B) = 10^4 - 2 \cdot 9^4 + 8^4 = 974$ elde ederiz.

13. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ olmak üzere,

$$\frac{xy^2z}{x^4 + y^4 + z^4}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

A) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{E)}}$ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Çözüm. Aritmetik-geometrik ortalamalar eşitsizliğinden,

$$x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{2}y^4 + z^4$$

$$\ge 4 \cdot \sqrt[4]{x^4 \cdot y^8 \cdot z^4 \cdot (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{\sqrt{2}}xy^2z$$

$$\Rightarrow \frac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4} \le \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

çıkar. Eşitlik durumu,

$$x^4 = \frac{1}{2}y^4 = z^4 \Rightarrow y = t > 0, \; x = z = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}t$$

için elde edilir.

14. $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AC kenarı üzerinde bir M noktası ve BC kenarı üzerinde bir N noktası alınmıştır. $[AN]$ ve $[BM]$ doğru parçalarının kesişim noktası O olsun.

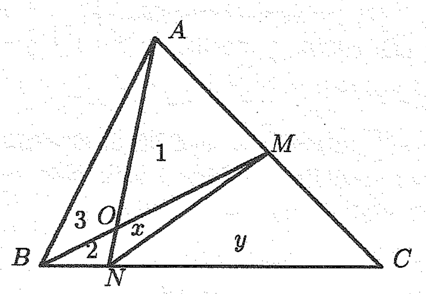
$$Alan(\overset{\triangle}{OMA}) = 1, \quad Alan(\overset{\triangle}{OBN}) = 2 \text{ ve}$$

$$Alan(\overset{\triangle}{OAB}) = 3$$

olduğuna göre, $Alan(\overset{\triangle}{MNC})$ nedir?

A) 2 $\boxed{\text{B)}}$ $\frac{40}{21}$ C) $\frac{20}{11}$ D) 3 E) $\frac{60}{31}$

Çözüm.



Şekilde, $Alan(\overset{\triangle}{ONM}) = x$ ve $Alan(\overset{\triangle}{MNC}) = y$ diyelim. $3x = 1 \cdot 2$ eşitliğinden $x = \frac{2}{3}$ bulunur. Biz y 'yi bulmak istiyoruz.

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{Alan(\overset{\triangle}{ABM})}{Alan(\overset{\triangle}{MBC})} = \frac{3+1}{2+x+y} = \frac{4}{2+\frac{2}{3}+y},$$

ve

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{Alan(\overset{\triangle}{ANM})}{Alan(\overset{\triangle}{MNC})} = \frac{1+x}{y} = \frac{1+\frac{2}{3}}{y}.$$

Bu iki eşitlikten

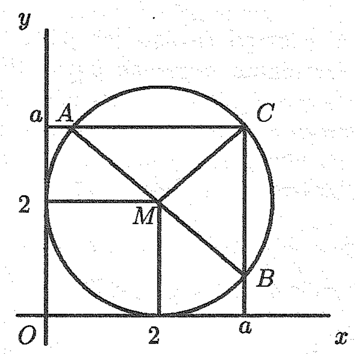
$$\frac{4}{2+\frac{2}{3}+y} = \frac{1+\frac{2}{3}}{y} \Rightarrow y = \frac{40}{21}$$

elde edilir.

15. Yarıçapı 2 birim olan bir çember, bir karenin iki komşu kenarına içten teğet olup, karenin sadece bir köşesinden geçmektedir. Buna göre, karenin kenar uzunluğu kaç birimdir?

$\boxed{\text{A)}}$ $2+\sqrt{2}$ B) 3 C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}$ E) $4-\sqrt{2}$

Çözüm.



Kareyi, şekildeki gibi, Deskartes koordinat sisteminde yerleştirelim. Çemberin merkezine M ve çemberin karenin kenarları ile kesiştiği noktalara da A ve B denirse, M 'nin $[AB]$ üzernde olduğu açıktır.

Karenin kenar uzunluğuna a diyelim. O halde C 'nin koordinatları (a, a) ve M 'nin koordinatları da $(2, 2)$ olduğundan,

$$2 = |CM| = \sqrt{(a-2)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{2}(a-2)$$

çıkar. Buradan, $a = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$ bulunur.

16. 1, 2, ..., 999, 1000 sayıları verilsin. Bu sayılardan azalan aritmetik dizi oluşturacak şekilde kaç tane sayı üçlüsü seçilebilir? (Örneğin, 3, 2, 1 ve 9, 6, 3 birer azalan aritmetik dizidir.)

A) 245500 B) $\frac{1}{3}\binom{500}{3}$ C) 247500
D) $\frac{1}{3!}\binom{1000}{3}$ $\boxed{\text{E)}}$ 249500

Çözüm. Azalan aritmetik dizi sayısı, artan aritmetik dizi sayısına eşit olduğundan, artan aritmetik dizi sayısını bulalım. a dizinin ilk terimi ve d de dizi farkı olursa, $a \geq 1$, $d \geq 1$ ve $a + 2d \leq 1000$ sağlanmalıdır. Buradan $a \leq 1000 - 2d$, $(d = 1, 2, ..., 499)$ olur. Böylece, artan aritmetik dizi oluşturan üçlüler sayısı

$$\sum_{d=1}^{499}(1000-2d) = 499 \cdot 1000 - 2 \cdot (1+2+...+499)$$

$$= 499 \cdot 1000 - 2 \cdot \tfrac{1+499}{2} \cdot 499$$
$$= 499 \cdot 1000 - 499 \cdot 500 = 249500$$

olur.

17. a, b, c gerçel sayıları $|a| \leq 3$, $|b| \leq 2$, $|c| \leq 1$ koşullarını sağlamak üzere, tüm $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ denklemlerini düşünelim. Bu denklemlerden en az birini sağlayan pozitif gerçel sayıların en büyüğüne x_0 diyelim. x_0 sayısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $2 < x_0 < 3$ **B)** $1 < x_0 < 2$ **C)** $0 < x_0 < 1$
$\boxed{\textbf{D)}}$ $3 < x_0 < 4$ **E)** $4 < x_0 < 5$

Çözüm. Reel katsayılı 3 dereceli her polinomun en az bir reel kökü vardır. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 1$ polinomunun en büyük pozitif kökü, problemdeki koşulları sağlayan polinomların reel köklerinin hepsinden büyüktür. Gerçekten, $f(x)$ polinomunun en büyük pozitif köküne x_0 dersek, $\forall x > x_0 > 0$ için,

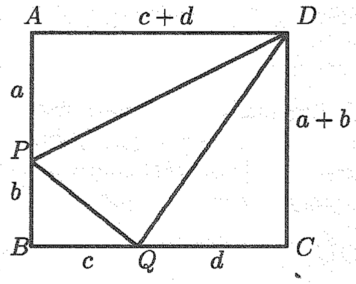
$$0 = f(x_0) < f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 1$$
$$\leq x^3 + ax^2 + bx + c$$

olur. Yani, x^3+ax^2+bx+c ($|a \leq 3$, $|b| \leq 2$, $|c| \leq 1$) polinomlarının hiç birisinin x_0 'dan büyük kökü yoktur. Şimdi, x_0 'ın bulunduğu aralığı tahmin edelim. $f(3) < 0$ ve $f(4) > 0$ olduğundan, sürekli fonksiyonlar için Aradeğer Teoreminden, $x_0 \in (3, 4)$ olur. (Her $x > 4$ için $f(x) > 0$ olduğu kolayca görülebilir.)

18. Bir $ABCD$ dikdörtgeninde AB kenarı üzerinde bir P noktası ve BC kenarı üzerinde bir Q noktası, $\overset{\triangle}{APD}$, $\overset{\triangle}{PBQ}$ ve $\overset{\triangle}{QCD}$ üçgenlerinin alanları eşit olacak biçimde alınmıştır. Buna göre, $\frac{|AP|}{|PB|}$ oranı nedir?

A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{5}+2}{4}$
D) $\frac{4}{3}$ $\boxed{\textbf{E)}}$ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Çözüm.



$|AP| = a$, $|PB| = b$, $|BQ| = c$, $|QC| = d$ diyelim. Alanların eşitliğinden, $\frac{1}{2}a(c+d) = \frac{1}{2}d(a+b) = \frac{1}{2}bc$ olur. İlk eşitlikten,

$$ac = db \Rightarrow \tfrac{d}{c} = \tfrac{a}{b} \qquad (1)$$

Son iki ifadenin eşitliğinden,

$$\tfrac{a+b}{b} = \tfrac{c}{d} \qquad (2)$$

çıkar. (1) 'i (2) 'de yerine koyarsak, $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a}{b}+1 = \frac{b}{a}$ elde ederiz. $\frac{a}{b} = x$ dersek, $x+1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ bulunur.

UYARI: $\frac{|AP|}{|PB|}$ oranının 1 'den küçük olacağını görmek zor değildir. 1 'den küçük olan tek seçenek ise $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 'dir!!!

19. 1 'den 99 'a kadar (1 ve 99 dahil) tüm tek sayıları alalım. Bu sayıların hepsinin toplamına A_1, tüm ikişerli çarpımlar toplamına A_2, tüm üçerli çarpımlar toplamına A_3, ... , tüm 49-arlı çarpımlar toplamına A_{49} ve hepsinin çarpımına A_{50} diyelim. (Örneğin, a, b, c, d sayıları için ikişerli çarpımlar toplamı $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ 'dir.) Buna göre,

$$A_{50} - A_{49} + A_{48} - A_{47} + \ldots + A_2 - A_1$$

toplamı neye eşittir?

A) $-50!$ **B)** $50!$ $\boxed{\textbf{C)}}$ -1
D) 1 **E)** $-2^{49}.49!$

Çözüm. $(x+1)(x+3)\cdots(x+97)(x+99)$ ifadesinde parantezleri açarak, sadeleştirirsek,

$(x+1)(x+3)\cdots(x+97)(x+99) = x^{50}+A_1x^{49}+A_2x^{48}+\cdots+A_{48}x^2+A_{49}x^1+A_{50}$ olur. $x=-1$ koyarsak, $A_{50}-A_{49}+A_{48}-...+A_2-A_1+1 = 0 \Rightarrow A_{50}-A_{49}+A_{48}-...+A_2-A_1 = -1$ olur.

20.

$$\left\{\begin{array}{l} x^6+4x^5+3x^4-6x^3-20x^2-15x+5=0 \\ x^5+2x^4-x^3-5x^2-10x+5=0 \end{array}\right\}$$

denklem sisteminin gerçel çözümü x_0 ise, $3x_0^3+7$ tamsayısının rakamlar toplamı kaçtır?

$\boxed{\text{A)}}$ 4 **B)** 13 **C)** 7 **D)** 5 **E)** 16

Çözüm.

1. Çözüm. x reel sayısı

$$x^6+4x^5+3x^4-6x^3-20x^2-15x+5=0 \quad (1)$$
$$x^5+2x^4-x^3-5x^2-10x+5=0 \quad (2)$$

sistemini sağlasın. Eşitlikleri taraf tarafa çıkartırsak,

$$x^6+3x^5+x^4-5x^3-15x^2-5x=0 \Rightarrow$$

$$x^5+3x^4+x^3-5x^2-15x-5=0 \quad (3)$$

olur. (2) ve (3) 'ü taraf tarafa toplarsak,

$$2x^5+5x^4-10x^2-25x=0$$

$$\Rightarrow 2x^4+5x^3-10x-25=0 \quad (4)$$

çıkar. (3) 'ten (2) 'yi çıkarırsak,

$$x^4+2x^3-5x-10=0 \quad (5)$$

olur. (5) 'in her iki yanını 2 ile çarptıktan sonra,

$$2x^4+4x^3-10x-20=0 \quad (6)$$

olur. Şimdi, (4) 'ten (6) 'yı çıkartırsak,

$$x^3-5=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{5} \Rightarrow 3x^3+7=22$$

elde edilir.

2. Çözüm. x_0 'ın sistemi sağlayan reel sayı olduğunu varsayıp eşitlikleri taraf tarafa çıkartırsak,

$$x_0^6+3x_0^5+x_0^4-5x_0^3-15x_0^2-5x_0=0 \Rightarrow$$

$$x_0^5+3x_0^4+x_0^3-5(x_0^2+15x_0+5)=0 \Rightarrow$$

$$(x_0^3-5)(x_0^2+3x_0+1)=0$$

olur. $x_0^2+3x_0+1 \neq 0$ olduğundan $x_0^3=5 \Rightarrow x_0=\sqrt[3]{5}$ bulunur.