PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 15 Haziran 2002 tarihine kadar gönderiniz.

Açıklama: Yarışma Sorularının doğru cözümlerini gönderenlerin isimleri dergide belirtilecektir.

– 2002 senesi boyunca en fazla doğru çözüm gönderenler arasından en az ilk 3 kişiye ödül olarak Matematik Dünyası 2003 yılı aboneliği ve yazarların imzası ile Matematik kitapları verilecektir.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.256. 2000^{2003} sayısı birkaç tane ardışık tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilir mi?

A.257. ABC üçgeninde $[BL]$ ve $[AK]$ açıortaylarını çizilmiştir. $[KL]$ de AKC üçgeninin açıortayı ise, BAC açısını bulunuz.

A.258. Okuldaki 15 sınıftan toplam 100 kişi alındı. En az iki sınıftan aynı sayıda öğrenci alınmış olduğunu gösteriniz.

A.259. x pozitif gerçel sayı olmak üzere $\frac{x^3}{8}+\frac{6}{x}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

A.260. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dizisinde $a_1 = 2002, a_2 = 2001$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ise, a_{2002}'yi bulunuz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.256. $4(a+b+c) = ab+bc+ca$ eşitliğini sağlayan tüm a, b, c pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Y.257. ABC ikizkenar üçgeninde ($|AB| = |BC|$), $s(\widehat{ABC}) = 80°$ dir ve $s(\widehat{OAC}) = 40°, s(\widehat{OCA}) = 30°$ olmak üzere üçgenin içerisinde bir O noktası alınmıştır. $s(\widehat{BOC})$'yi bulunuz.

Y.258. Dışbükey 2002-genin köşelerinde birer tane bilye bulunur. Her adımda bilyelerden bazıları aynı vektör boyunca ötelenebilir. En az kaç adımda tüm bilyeler aynı doğru üzerine getirilebilir?

Y.259. Artan $f : R \to R$ fonksiyonu her $x \epsilon R$ için $f(-x) = -f(x)$ eşitliğini sağlar (yani, f tek fonksiyondur). Herhangi a, b, c sayıları için $a + b + c = 0$ ise, $f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a) \leq 0$ eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Y.260. Düzgün 30-genin köşelerine 1'den 30'a kadar tam sayılar yerleştirilmiştir. Her adımda iki komşu sayı yer değiştirebilir. Bir kaç böyle adımdan sonra her sayı tam karşıdaki köşeye geçmiştir. Bu adımların en az birinde toplamları 31 olan iki sayının yer değiştirdiğini kanıtlayınız.

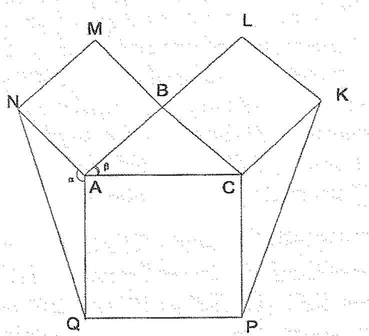
ÇÖZÜMLER

A.246. n pozitif tamsayısı 3'ün katı değilse, her birinin basamakları toplamı n'ye bölünen iki ardışık pozitif tamsayı bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. $S(a)$ ile a sayısının basamakları toplamını gösterelim. İki ardışık m ve $m+1$ sayılarını aldığımızda m sayısı 9'la bitmezse, $s(m+1) = s(m)+1$ olduğundan $s(m+1)$ ve $s(m)$ sayıları aynı zamanda n'ye bölünemez ($n \neq 1$). Dolayısıyla m sayısını 9'la biten sayılar arasında aramamız gerekir. m sayısı tam olarak k tane 9'la bitiyorsa $s(m+1) = s(m)-9k+1$ olacak. O halde m sayısını, $n|s(m)$ ve $n|(9k-1)$ olacak şekilde almamız yeterlidir. $9\cdot1-1, 9\cdot2-1, 9\cdot3-1, \ldots, 9n-1$ sayılarından hiçbiri n'e bölünmezse, $9s-1 \equiv 9t-1$ (mod n) olacak şekilde iki $1 \leq s \leq t \leq n$ sayıları bulunacak. O halde, n ile 9 aralarında asal olduğundan $n|[9(t-s)]$ den $n|(t-s)$ elde ederiz. Çelişki! Böylece, $n|(9k-1)$ olacak şekilde bir pozitif tam k sayısı bulunur. Şimdi m olarak, ilk $n-1$ basamağı 1, geriye kalan k basamağı 9 olan $k-1$ basamaklı bir sayı alırsak, $s(m) = n+(9k-1)$ ve $s(m+1) = n+9k-1-9k+1 = n$ sayıları n'e bölünür.

A.247. ABC üçgeninin kenarları üzerinde dışa yönelik $ABMN$, $BCKL$, $ACPQ$ kareleri çizilmiştir. QN ve KP doğru parçaları üzerinde $QNTZ$ ve $KPXY$ kareleri çizilmiştir. $ABMN$ ve $BCKL$ karelerinin alanları farkı d ise $QNTZ$ ve $KPXY$ karelerinin alanları farkını bulunuz.

Çözüm. Kosinüs teoreminden $|QN|^2 = |AQ|^2 +$



Şekil 1

$|AN|^2 - 2|AN| \cdot |AQ| \cdot Cos\alpha$;$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot Cos\beta$. $\alpha + \beta = 180°$ olduğundan, $cos\alpha = -cos\beta$ elde ederiz. Dolayısıyla, $|QN|^2 + |BC|^2 = 2|AB|^2 + 2|AC|^2$ Benzer şekilde, $|KP|^2+|AB|^2 = 2|BC|^2+2|AC|^2$. O halde aranan alanlar farkı $|QN|^2 - |KP|^2 = 3|AB|^2 - 3|BC|^2 = 3d$ olacak.

A.248. Kutuda mavi ve kırmızı olmak üzere toplam 30 tane bilye bulunur. Herhangi 12 tane bilyeden enaz biri mavidir, herhangi 20 bilyeden enaz biri kırmızıdır. Sepetteki mavi ve kırmızı bilyelerin sayısını bulunuz.

Çözüm. Mavi bilyelerin sayısını m, kırmızı bilyelerin sayısını da k ile gösterelim. Kırmızı bilyelerin sayısı 11'den büyük olsaydı, mavi olmayan 12 bilye alabilecektik, dolayısıyla $k \leq 11$'dir. $m > 19$ olsaydı, 20 tane mavi (yani kırmızı olmayan) bilye alabilecektik, dolayısıyla $m \leq 19$'dur. $k+m = 30$ olduğundan, $k = 11, m = 19$ olmak zorundadir.

A.249. Liseden birkaç kişi ayrıldıktan ve birkaç kişi liseye katıldıktan sonra öğrenci sayısı %10 azaldı, erkek öğrencilerin sayısı %50 'den %55 'e çıktı. Erkek öğrenci sayısı arttı mı , azaldı mı?

Çözüm. Başlangıçta lisedeki öğrenci sayısı a olsun. O halde başlangıçta erkek öğrenci sayısı $\frac{a}{2}$'dir. Öğrenci sayısı %10 azaldıktan sonra $\frac{90a}{100} = \frac{9a}{10}$, erkek öğrenciler de bunların %55, yan, $\frac{9a}{10} \cdot \frac{55}{100} = \frac{99a}{200}$ olacak. $\frac{a}{2} > \frac{99a}{200}$ olduğundan erkek öğrenci sayısı azalmış olacak.

A.250. Bir aile gece köprüye yaklaştı. Baba köprüyü 1 dakikada , anne 2 dakikada , çocuk 5 dakikada , büyükanne 10 dakikada geçebilir. Köprüden aynı anda en fazla 2 kişi geçebilir ve ailenin tek bir lambası bulunmaktadır. Aile 17 dakikada köprüyü nasıl geçebilir? (Köprüyü lambasız geçmek mümkün değil ve köprü uzaktan aydınlatılamaz.)

Çözüm. Önce baba ile anne köprüyü 2 dakikada geçer ve baba 1 dakikada lamba ile geriye döner. Sonra çocukla büyükanne 10 dakikada köprüyü geçer. Anne 2 dakikada lamba ile geriye döner. En son baba ile anne yeniden köprüyü 2 dakikada geçer. Böylece toplam 2+1+10+2+2 dakikada ailenin tamamı köprüyü geçmiş olacak.

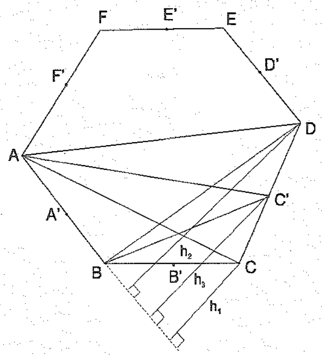
Y.246. $A, 2A, 3A, ..., 500000A$ sayılarından hiçbirisinin son 6 basamağı birbirine eşit (yani *aaaaaa* şeklinde) olmayacak biçimde bir altı basamaklı A sayısı bulunur mu?

Çözüm. A sayısını $OBEB(A, 10) = 1$ şeklinde alırsak, $A, 2A, ..., 10^6A$ sayılarının hepsi 10^6 moduna göre birbirinden farklı olacak. Gerçekten $0 < m < k < 10^6$ olmak üzere m ve k sayıları için $mA \equiv kA \pmod{10^6}$ sağlanırsa, $10^6|[(k - m)A]$, buradan da $10^6|(k - m)$ olacak, bu da imkansızdır. Böylece $A, 2A, ..., 10^6A$ sayılarının son 6 basamaklarının oluşturduğu 6 basamaklı sayılar hepsi birbirinden farklı olacak ve bunların arasında 0'dan $(10^6 - 1)$'e kadar olan her bir sayıya tam olarak birer kez rastlanacak. O halde son 6 basamağı 111111,222222,...,999999,000000 olan sayıların sonda gelmelerini (yani bu sayıların $10^6A, (10^6 - 1)A, (10^6 - 2)A, ..., (10^6 - 9)A$ olmasını) sağlayabilirsek, ilk 500000 (hatta ilk $10^6 - 10$) sayı arasında son 6 basamağı *aaaaaa* şeklinde olan sayıya rastlanmayacak. Bunun için $A = 10^6 - 111111 = 888889$ alalım. o halde $10^6A = 0 \pmod{10^6}$, $(10^6 - 1)A \equiv 111111 \pmod{10^6}$ olacak ve her $m = 2, 3, ..., 9$ için $(10^6 - m)A \equiv (-m)(-111111) \equiv (mmmmmm)_{10} \pmod{10^6}$ elde edilir.

Y.247. $ABCDEF$ dışbükey altıgeninin AB, BC, CD, DE, EF, FA kenarlarının orta noktaları sırasıyla A', B', C', D', E', F' olsun. ABC',BCD',CDE',DEF',EFA',FAB'

üçgenlerinin alanları toplamı S ise, $ABCDEF$ altıgeninin alanını bulunuz.

Çözüm. $\overset{\triangle}{ABC}, \overset{\triangle}{ABD}, \overset{\triangle}{ABC'}$ üçgenlerinin C, D



ve C' köşelerinden çıkan yüksekliklerini sırasıyla h_1, h_2, h_3 ile gösterirsek, $h_3 = \frac{h_1+h_2}{2}$ olacak. Dolayısıyla $A(\overset{\triangle}{ABC'}) = \frac{1}{2}(\overset{\triangle}{ABC} + \overset{\triangle}{ABD})$'dir. Benzer şekilde

$$A(\overset{\triangle}{BCD'}) = \frac{1}{2}(A(\overset{\triangle}{BCD}) + A(\overset{\triangle}{BCE})),$$

$$A(\overset{\triangle}{CDE'}) = \frac{1}{2}(A(\overset{\triangle}{CDE}) + A(\overset{\triangle}{CDF})),$$

$$A(\overset{\triangle}{DEF'}) = \frac{1}{2}(A(\overset{\triangle}{DEF}) + A(\overset{\triangle}{DEA})),$$

$$A(\overset{\triangle}{EFA'}) = \frac{1}{2}(A(\overset{\triangle}{EFA}) + A(\overset{\triangle}{EFB})),$$

$$A(\overset{\triangle}{FAB'}) = \frac{1}{2}(A(\overset{\triangle}{FAB}) + A(\overset{\triangle}{FAC}))$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi $ABCDEF$ altıgeninin x alanını bulmak için bu eşitliklerin toplamını alalım.

$$S = \frac{1}{2}[(A(\overset{\triangle}{ABC})+A(\overset{\triangle}{FAC})+A(\overset{\triangle}{CDF})+A(\overset{\triangle}{DEF})) +$$

$$(A(\overset{\triangle}{ABD})) + A(\overset{\triangle}{BCD}) + A(\overset{\triangle}{DEA}) + A(\overset{\triangle}{EFA})) +$$

$$(A(\overset{\triangle}{BCE}))+A(\overset{\triangle}{CDE})+A(\overset{\triangle}{EFB})+A(\overset{\triangle}{FAB}))] = \frac{3x}{2}$$

Böylece $x = \frac{2S}{3}$'tür.

Y.248. 10 bankacı bir masa etrafında oturmuşlar ve herbir bankacının hesabında bir gerçel sayı yazılmıştır. Bu sayılar pozitif ve negatif olabilir. Bankacılar sırasıyla geriye kalan 9 kişinin herbirinin hesabına (işlemlerden önceki) kendi sayısının $\frac{1}{9}$'unu ekliyor, kendisine ise 0 yazıyor. Onuncu işlemden sonra bankacıların sayılarının ilk baştaki duruma gelemeyeceğini gösteriniz.

Çözüm. Bankacıların hesabındaki pozitif sayıların toplamını p ile gösterelim. Herhangi bir işlem yapan bankacının hesabındaki para a negatifse, eklenen $\frac{a}{9}$ sayıları negatif olduğundan, işlem sonucu p sayısı artmayacak ve $p > 0$ ise, kesin azalacak. $a > 0$ ise, p sayısı en az $\frac{a}{9}$ kadar azalacak. O halde, hesabındaki para sıfırdan farklı olan ilk bankacının işleminden sonra p azalacak ve hiç artmadığı için ilk baştaki duruma dönmeyecek.

Y.249. $a_1 \le a_2 \le a_3$ ve $b_1 \le b_2 \le b_3$ olmak üzere $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$, $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1$ eşitliklerini sağlayan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ gerçel sayıları verilmiştir. $a_1 \le b_1$ ise $a_3 \le b_3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ ve $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$ polinomlarını alalım. Bu polinomların ilk 3 katsayıları $1, a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3, a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3$ olduğundan, c bir sabit olmak üzere $Q(x) = P(x) + c$ yazabiliriz. $Q(x)$'in en küçük kökü b_1 olduğundan her $x\epsilon(-\infty, b_1)$ için $Q(x) < 0$'dır. $a_1 \le b_1$ olduğundan $c = P(a_1) + c = Q(a_1) \le 0$ elde edilir. Dolayısıyla $Q(a_3) = P(a_3) + c = c \le 0$'dır. $Q(x)$'in en büyük kökü b_3 olduğundan her $x\epsilon(b_3, \infty)$ için $Q(x) > 0$'dır. o halde $a_3 > b_3$ olsaydı $Q(a_3) > 0$ olacaktı. Dolayısıyla $a_3 \le b_3$.

Y.250. Bir dışbükey n-gende, her köşegen en fazla bir başka köşegenle kesişecek şekilde en fazla kaç köşegen çizilebilir? (Köşegenler aynı köşeden çıkıyorsa, bu köşe kesişim noktası olarak kabul edilmiyor.)

Çözüm. $n = 2k$ ise, $A_1, A_2, A_3, ...A_{2k}$ çokgeninin önce $[A_1A_3], [A_1A_4], [A_1A_5], ..., [A_1A_{2k-1}]$ köşegenlerini (bunların sayısı (n-3)'tür), sonra $[A_1A_4], [A_4A_6], [A_6A_8], ..., [A_{2k-2}, A_{2k}]$ köşegenlerini çizersek (bunlar da $k - 1$ tanedir), sadece $[A_1A_{2i+1}]$ ve $[A_{2i}A_{2i+2}]$ köşegenleri kesişecek ($i = 1, 2, ..., k - 1$), dolayısıyla bu köşegenleri problemin koşulunu sağlar. Toplam çizilen köşegen sayısı $n-3+k-1=\frac{3n}{2}-4$ olacak. Benzer şekilde, $n=2k+1$ ise, $[A_1A_3],[A_1A_4],...,[A_1A_{2k}]$ ve $[A_2A_4],[A_4,A_6],...,[A_{2k-2},A_{2k}]$ köşegenleri koşulu sağlayacak ve bu köşegenlerin sayısı $n-3+k-1=\frac{3n}{2}-4-\frac{1}{2}$ olacak. Her iki durumda $[|\frac{3n}{2}|]-4$ tane köşegen çizilmiş olacaktır ($[|a|]$, a sayısının tam değerini göstermektedir). Bu sayının üst sınır olduğunu tümevarımla gösterelim. $n=3$ ve $n=4$ için her şey açıktır. Şimdi her $k<n$ için iddianın doğru olduğunu varsayarak n için de doğru olduğunu varsayarak n için de doğru olduğunu gösterelim. $n>4$ kabul edebiliriz. Problemin koşulu sağlanacak şekilde köşegenler çizilmiş olsun. Hiçbir çizilmiş köşegenle kesişmeyen bir köşegen (çizilmiş veya çizilmemiş) bulunduğunu gösterelim. Herhangi bir çizilmiş $[AB]$ köşegeni alalım. $[AB]$ aradığımız köşegen değilse, yanibaşka bir çizilmiş $[CD]$ köşegeni ile kesişiyorsa, $n>4$olduğundan $[AC],[CB],[BD],[DA]$ doğru parçalarından en az bir (diyelim $[AC]$ köşegeni hiçbir başka çizilmiş köşegenle kesişemez, çünkü $[AC]$ ile kesişen köşegen ya $[AB]$ ya da $[BC]$ ile kesişmek zorundadır. Böylece hiçbir çizilmemiş köşegenle kesişmeyen bir $[XY]$ köşegeni bulunur. $[XY]$ köşegeni çokgeni iki çokgene bölecek: bunlar m-gen ve k-gen olsun. O halde $m+k=n+2$ ve $m,k<n$ olacak. n-genin çizilmiş köşegenlerinin her biri ya m-genin, ya k-genin köşegenidir, ya da $[XY]$'dir. Tümevarımın varsayımından n-genin çizilmiş köşegenlerinin sayısı en fazla

$$([|\frac{3m}{2}|]-4)+([|\frac{3k}{2}|]-4)+1\leq$$

$$[|\frac{3(m+k)}{2}|]-7=[|\frac{3(n+2)}{2}|]-7=[|\frac{3n}{2}|]-4$$

olabilir.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla,İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.