# TEOREM VE BAZI İSPAT METOTLARININ YORUMU

**Can A. İlhan**
Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, ANKARA

---

*Teorem*, doğruluğu kanıtlanabilen önermedir [4]. Teoremin doğruluğunu göstermeye ispat denir. Bir teoremi ispatlarken aksiyomlardan (doğruluğu kabul edilen önermelerden) ya da diğer varsayımlardan (hipotezlerden) mantık kurallarıyla hareket edilir. O halde basit bir önerme olarak verilen teoremi, doğruluk değeri doğru olan bir önermenin gerektirmesi olarak ifade edebiliriz. Yani bize, $q$ önermesi teorem olarak verilirse, doğruluk değeri doğru olan bir $p$ önermesi için $p \Rightarrow q$ şeklinde ifade edebiliriz. $p$ önermesi doğru olduğundan, $q$ önermesinin doğru olması ile teoremin doğru olması eşdeğerdir. Bunu aşağıdaki doğruluk tablosunun 1. ve 2. satırını inceleyerek görebiliriz. Teoremi böyle yorumlayarak ispat metotlarının bir çoğunu mantık kurallarıyla anlaşılır hale getirmeyi amaçlıyoruz.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

*Önerme doğru ise doğruluk değeri 1; yanlış ise 0 ile gösterilmiştir.*

ÖRNEK : "$\sqrt{2}$ rasyonel sayı değildir" Bu bir teoremdir. Yani ispatlanabilir ve basit bir önerme şeklindedir. Bu teoremi şu şekilde de ifade edebiliriz "$a$, $b$ aralarında asal olan tamsayı $\Rightarrow \frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$ dir" Burada $p$ önermesi olarak, $a$ ile $b$ aralarında asal olan tamsayı alınabilir ve $p$ nin doğru olduğu kabul edilir. $q$ önermesi olarak, $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$ alınırsa, bu teoremi $p \Rightarrow q$ şeklinde ifade edilebileceği görünür. (Olmayana Ergi Metodu ile bu teorem ileride ispatlanacak)

Bir teoremin ispatı yapılırken mantık prensipleri kullanılarak metotlar geliştirilmiştir. Şimdi bunlardan bazılarını inceleyelim.

NOT : Bir $p$ önermesinin değili $\sim p$ sembolü ile gösterilecektir.

## DOĞRUDAN (DİREKT) İSPAT METODU

İspat metotlarından en çok kullanılan, daha doğrusu ilk akla gelen metot doğrudan ispat metodudur. Çünkü, $p$ önermesi doğru kabul edilerek direkt $q$ önermesinin doğru olduğunu gösterme esasına dayanır.

ÖRNEK TEOREM:

$a, b \in Z$ olmak üzere,

$a$, $b$'yi tam böler $\Rightarrow$ her bir $c$ tamsayısı için $a$, $bc$'yi tam böler.

[$p$: $a$, $b$'yi tam böler, $q$: her bir $c$ tamsayısı için $a$, $bc$'yi tam böler.]

**İSPAT :**
*a*, *b*'yi tam bölsün [*p* önermesinden hareket ediliyor]. Bu durumda, $b=ax$ olacak biçimde bir $x$ tamsayısı vardır. $bc=axc=a(xc)$ olduğundan *a*, *bc*'yi tam böler [*q* önermesi elde ediliyor].

**OLMAYANA ERGİ İSPAT METODU**

$p\Rightarrow q$ şartlı önermesinde *p* ve *q* önermelerinin alabileceği her doğruluk değeri için $\sim q\Rightarrow \sim p$ şartlı önermesinin doğruluk değeri ile aynı olduğunu, yani bu iki şartlı önermenin eş doğruluk değerlerine sahip olduğunu gösterelim:

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p\Rightarrow q$ | $\sim q\Rightarrow \sim p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Yukarıdaki tablodan, $p\Rightarrow q \equiv \sim q\Rightarrow \sim p$

*q* önermesinin değilinden başlayarak *p* önermesinin değilini elde ettiğimizi varsayalım. Yani, $\sim q\Rightarrow \sim p$ doğruluk değeri, doğru olan bir önerme olsun. Bu durumda, yukarıdaki denklikten $p\Rightarrow q$ önermesinin de doğruluk değeri doğrudur. Teoremin tanımından *p* doğru önerme olacağından *q* önermesi doğrudur. Yani *p*, *q*'yu gerektirir.

**ÖRNEK TEOREM:** *a*, *b* aralarında asal olan tamsayı $\Rightarrow \dfrac{a}{b} \neq \sqrt{2}$ dir.

[*p*: *a*,*b* aralarında asal tamsayıdır, q : $\dfrac{a}{b} \neq \sqrt{2}$ ]

**İSPAT:**

$\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$ olsun [$\sim q$'dan hareket ediliyor]. Bu durumda, $\dfrac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ çifttir, dolayısıyla *a* çifttir. Yani, $a=2n$ olacak biçimde bir *n* tamsayısı vardır. $(2n)^2=2b^2 \Rightarrow 2n^2=b^2$ ise, $b^2$ çifttir, dolayısıyla *b* çifttir. *a* ile *b* çift ise 2 sayısı hem *a*'yı hem de *b*'yi tam böleceğinden, *a* ile *b* aralarında asal değildir [$\sim p$ elde ediliyor].

**ÇELİŞKİ BULMA İSPAT METODU**

| $p$ | $q$ | $p\Rightarrow q$ | $\sim p\vee q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

Yukarıdaki tablodan $p\Rightarrow q$ şartlı önermesi ile $\sim p\vee q$ bileşik önermesinin doğruluk değerleri aynıdır. De Morgan kurallarından [$\sim(p\vee q) \equiv \sim p\wedge \sim q$ ve $\sim(p\wedge q)\equiv \sim p\vee \sim q$],
$p\Rightarrow q\equiv \sim p\vee q\equiv \sim(p\wedge \sim q)$ denkliği elde ederiz.

$p$ önermesi ve $q$'nun değilinden hareket ederek doğru bir önerme olduğunu bildiğimiz $r$ önermesiyle çelişkiye düştüğümüzü, yani $\sim r$'yi elde ettiğimizi kabul edelim. Başka bir deyişle $p\wedge\sim q \Rightarrow \sim r$ şartlı önermesinin doğruluk değeri doğru olsun. Kontrapozitiflikden dolayı, $p\wedge\sim q \Rightarrow \sim r \equiv r \Rightarrow \sim(p\wedge\sim q)$ denkliğini elde ederiz. Bu denklikten, $r \Rightarrow \sim(p\wedge\sim q)$ şartlı önermesi doğru ve $r$ doğru bir önerme olduğundan $\sim(p\wedge\sim q)$ önermesinin doğru olduğu sonucu çıkar. Buna göre (1) ile gösterilen denklikten $p \Rightarrow q$ teoreminin doğru olduğu sonucuna ulaşılır. O halde, $p$ önermesi ve $q$ nun değilinden başlayarak doğru bir önermeyle çelişkiye düşme esasına dayanan metoda çelişki bulma metodu denir.

**ÖRNEK TEOREM :** $f: X \to Y$ fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. $f$, bire-bir fonksiyon $\Rightarrow f^{1}(f(A))=A$ dır. [$p$:$f$, bire-bir fonksiyon, $q$:$f^{1}(f(A))=A$]

**İSPAT :** $f$, bire-bir fonksiyon ve $f^{1}(f(A)) \neq A$ olsun [$p$ ve $\sim q$'dan hareket ediliyor]. Her zaman $A \subset f^{1}(f(A))$ olduğundan (neden?), $f^{1}(f(A)) \not\subset A$ dır. Bu durumda $\exists x \in f^{-1}(f(A)) \ni x \notin A$ dır [$r$ önermesi olarak $x \notin A$ önermesini alalım]. $f(x)=y \in f(A)$ ise $\exists a \in A \ni f(a) = y$ dir. $y=f(a)=f(x)$ ve $f$, bire-bir fonksiyon olduğundan $x=a$ dır. O halde $x \in A$ dır [$r$ önermesiyle çelişkiye düştük, yani $\sim r$ önermesini elde ettik].

## TÜMEVARIM METODU

Tümevarım metodu, önermenin değişkenlerinin kümesi olarak, doğal sayılar ya da doğal sayıların boştan farklı bir alt kümesi alındığında kullanılır. Doğal sayılar kümesinin boştan farklı bir alt kümesi $D$ olsun. $D$ tam sıralı bir kümedir. $D$'nin en küçük elemanı vardır ve bu eleman $a$ olsun. Verilen $P(n)$ önermesi için $P(a)$ doğru ise $D$ kümesinin her $k$ elemanı için $P(k)$ önermesinin doğru olduğunu varsayalım. $P(k+1)$ doğru bir önerme olduğunu gösterirsek, $D$ kümesi üzerinde $P(n)$ önermesinin ispatını gerçekleştirmiş oluruz. Çünkü, $P(a)$ doğru ise $P(a+1)$ doğru bir önermedir. Bu şekilde; $P(a+2)$, $P(a+3)$,...$P(a+n)$ .... doğru olacağından $D$'nin her elemanı için $P(n)$ önermesi doğru olur.

Bu metot teknik olarak farklı fakat doğrudan ispat metodu sınıfına sokabiliriz.

**ÖRNEK TEOREM:** $1+2+3+...+n=\dfrac{n.(n+1)}{2}$

**İSPAT :** (i) $n=1$ için $1=\dfrac{1.2}{2}$ doğrudur.

(ii) $n=k$ için verilen önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani $1+2+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ doğru olsun.

Şimdi $n=k+1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$1+2+...+k+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ dir.}$$

$n=k+1$ için de önermemiz doğrulandığından ispat tamamlanmış olur.

## MANTIK PRENSİPLERİNDEN YARARLANARAK ELDE EDİLEN BAZI İSPAT METOTLARI

Mantık kurallarına bağlı kalarak bir çok ispat metotları geliştirilebilir. Biz burada çok kullanılan iki tane metodu vereceğiz.

$p \wedge q \Rightarrow r \equiv \sim(p \wedge q) \vee r \equiv \sim p \vee \sim q \vee r \equiv (\sim p \vee r) \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge \sim r) \vee \sim q \equiv p \wedge \sim r \Rightarrow \sim q$

Şimdi, $p$ önermesinin kendisi ve $r$'nin değilinden başlayarak $q$ önermesinin değilini elde ettiğimizi varsayalım. Yani, $p \wedge \sim r \Rightarrow \sim q$ doğruluk değeri doğru olan bir önerme olsun. Bu durumda, yukarıdaki denkliklerden $p \wedge q \Rightarrow r$ önermesi de doğruluk değeri doğru olan bir önermedir. Teoremin tanımından $p \wedge q$ doğruluk değeri, doğru olan bir önerme olacağından $r$ doğru bir önerme olacaktır, yani $p \wedge q$, $r$'yi gerektirir.

**ÖRNEK TEOREM:** $A \subset B$ *ve* $B \subset A \Rightarrow A=B$ dir $[P{:}A \subset B,\ q{:}B \subset A,\ r{:}A=B]$

**İSPAT:** $A \subset B$ ve $A \neq B$ olsun [$p$ ve $\sim r$ den hareket ediliyor].
Bu durumda en az bir $x$ elemanı $B$ kümesinin elemanı iken $A$ kümesinin elemanı değildir. O halde, $B \not\subset A$ dır. [$\sim q$ önermesi elde ediliyor.]

2) $p \Rightarrow q \vee r$ tipinde bir teorem verilmiş ise;

$p \Rightarrow q \vee r \equiv \sim p \vee q \vee r \equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee r \equiv p \wedge \sim q \Rightarrow r$

Şimdi, $p$ önermesinin kendisi ve $q$'nun değilinden hareket ederek $r$ önermesini elde ettiğimizi varsayalım. Yani, $p \wedge \sim q \Rightarrow r$ doğruluk değeri doğru olan bir önermedir. Bu durumda, yukarıdaki denkliklerden $p \Rightarrow q \vee r$ önermesi de doğruluk değeri doğru olan bir önermedir. Teoremin tanımından $p$ doğruluk değeri, doğru olan bir önerme olacağından $q \vee r$ doğru bir önermedir, yani $p$, $q \vee r$'yi gerektirir.

**ÖRNEK TEOREM:**

$t$ bir asal sayı ve $a,b \in \mathrm{N}$ olmak üzere,
$t$ sayısı $ab$'yi tam böler $\Rightarrow$ $t$, $a$'yı tam böler veya $t$, $b$'yi tam böler.
[$p$: $t$ sayısı $ab$'yi tam böler, $q$:$t$, $a$'yı tam böler, $r$:$t$, $b$'yi tam böler]

**İSPAT:**
$t$ sayısı $ab$'yi tam bölsün ve $t$, $a$'yı tam bölmesin [$p$ ve $\sim q$ dan hareket ediliyor]. Bu durumda, $t$ ile $a$ aralarında asaldır. $t$, $ab$'yi tam böldüğüne göre $t$, $b$'yi tam böler [$r$ önermesi elde ediliyor].

## KAYNAKÇA

[1] Mustafa Çiçek: Genel Topoloji Ders Notları, Ankara Ü., Fen Fak, 1993

[2] S.Balcı: Modern Cebire Giriş, Ankara Ü., Fen Fak. Y, 1993

[3] D.Hilt ert and W. Ackermann: Mathematical Logic, Chelsea P.C, 1950

[4] Türk Dil Kurumu, Matematik Terimleri Sözlüğü, 2000