İLGİNÇ LİMİT PROBLEMLERİ

Simten Uyhan
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, ANTALYA

Matematik ile ilgilenen her bireyin sık sık karşılaştığı kavramlardan birisi de limit kavramıdır. Reel ve kompleks sayı dizilerinin limit kavramı kendi başına çok önemli olmanın yanısıra, fonksiyonların sürekliliğini kavramada; türev ve integral kavramlarını anlamada, sonsuz toplam ve çarpımları incelemede çok güçlü teknik araçtır. Bu yazımızda genç arkadaşlara, belki birçok defalar anlatılan limit kavramını bir kere daha hatırlatıp, ilginçliğine inandığımız bir kaç problem sunacağız. Kolaylık için, sadece, reel sayı dizileri ile uğraşacağız.

Doğal sayılardan, reel sayılara tanımlı herhangi bir fonksiyona dizi denildiğini biliyorsunuz. Diziyi $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ ile gösteririz. Buradaki a_n, dizinin genel terimidir. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısı için $(a_n)_{n=1}^{\infty}$dizisinin terimleri, belli bir numaradan sonra, $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ açık aralığının içinde kalıyorsa, o zaman $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisine yakınsak dizi, a reel sayısına da $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin limiti denir. Daha matematiksel bir ifadeyle, $\forall\epsilon > 0$ için öyle bir N_ϵ doğal sayısı bulunabiliyorsa ki her $n \geq N_\epsilon$ için $|a_n - a| < \epsilon$ eşitsizliği sağlansın, o zaman $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin limiti a'dır denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ veya $a_n \to a$, $(n \to \infty)$ biçiminde gösterilir. Limit tanımından açıkça görülebilir ki, bir dizinin limiti varsa, tektir. Limiti olmayan dizilere ıraksak dizi denir. Örneğin, $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (5)$ sabit dizisinin limiti 5, $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{n})$ dizisinin limiti 0 dır. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = ((-1)^n)$ ve $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (n)$ dizileri de birer ıraksak dizidir.

Aşağıda ele alacağımız limit problemlerine geçmeden önce bazı çözümlerde kullanacağımız meşhur eşitsizlikleri ve "Sandeviç Teoremini " hatırlatalım.

Sandeviç Teoremi: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizileri için $a_n \leq b_n \leq c_n$ $(\forall n)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ ise, o zaman $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ vardır ve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ dir.

Bernoulli Eşitsizliği: $a, b \in R \setminus \{0\}$ ve $a > -1$ olsun. Bu takdirde

i) $0 < b < 1$ ise $(1+a)^b < 1 + ab$

ii) $b \notin [0,1]$ ise $(1+a)^b > 1 + ab$

eşitsizlikleri sağlanır.

Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği: $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0 \Rightarrow \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_1....a_n}$

Cauchy-Schwartz-Bunyakovski Eşitsizliği: $a_1, a_2, ..., a_n \in R$ ve $b_1, b_2, ..., b_n \in R$ verilmiş olsun. Bu durumda, $|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$ eşitsizliği sağlanır.

Şimdi birkaç ilginç limit problemi çözelim:

Problem 1. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ her bir terimi pozitif olan bir reel sayı dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}}$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliğinden
$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_n}{a_1} \geq n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}.\frac{a_2}{a_3}...\frac{a_n}{a_1}} = n\sqrt[n]{1} = n$

elde edilir. Dolayısıyla her n için, $0 \leq \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}} \leq \frac{1}{n}$ ve buradan Sandeviç Teoremine göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}} = 0$$

elde edilir.

Problem 2. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi için $\frac{a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4}{n} \to 0$, $n \to \infty$ ise $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \to 0$, $n \to \infty$ olacağını gösteriniz.

Çözüm. Cauchy-Schwartz-Bunyakowski Eşitsizliğinden

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \leq n\ (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$$

ve

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)^2 \leq n\ (a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4)$$

yazarız ve bu iki eşitsizlikten

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^4 \leq n^2 n\ (a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4)$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$0 \leq \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^4 \leq \frac{a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4}{n}$$

olur. Sandeviç Teoremini kullanarak, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = 0$ buluruz.

Problem 3. **a)** $|a| < 1$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty} na^n = 0$ (Daha genel: $\forall k \in N$ için $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0$)

b) $m > 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Çözüm.

a) $|a| < 1$ ise $|a| = \frac{1}{1+h}$, $h > 0$ yazılır. Buradan

$$n|a|^n = \frac{n}{(1+h)^n} = \frac{n}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\ldots+h^n} < \frac{n}{\frac{1}{2}n(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}$$

bulunur. $0 < \lim\limits_{n\to\infty} n|a|^n < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{(n-1)h^2} = 0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} n|a|^n = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} na^n = 0$ elde edilir.

b) $m > 1$ ise $\sqrt[n]{m} > 1$ olur. $\sqrt[n]{m} - 1 = h_n > 0$ diyelim. Buradan Bernoulli eşitsizliği gözönüne alınarak, $\sqrt[n]{m} = 1 + h_n \Rightarrow m = (1+h_n)^n > 1 + nh_n$ bulunur. Böylece, $0 < h_n < \frac{m-1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = 1$ olur. $m = 1$ ise $\sqrt[n]{m} = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = 1$ olur. $m < 1$ ise $\frac{1}{m} > 1$ dir. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{m}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m}} = 1$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = 1$ elde edilir.

c) $n > 1$ için $\sqrt[n]{n} > 1$ olur. $\sqrt[n]{n} - 1 = h_n > 0$ diyelim. Kolayca görülebilir ki

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \Rightarrow n = (1+h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \ldots + h_n^n$$

ve buradan $n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \Rightarrow 0 < h_n^2 < \frac{2}{n-1}$ elde edilir. $0 < \lim\limits_{n\to\infty} h_n^2 < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0$ olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ bulunur.

Problem 4. $b_1, b_2, ..., b_m$ pozitif sayıları verilmiş olsun. Genel terimi, $(\sqrt[n]{b_1^n + b_2^n + ... + b_m^n})$ olan dizinin limitini bulunuz.

Çözüm. Öncelikle $b = max\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ diyelim. O halde

$$b = \sqrt[n]{b^n} \leq \sqrt[n]{b_1^n + b_2^n + ... + b_m^n} \leq \sqrt[n]{mb^n} = b\sqrt[n]{m}$$

eşitsizliğinden, Sandeviç Teoremi ve $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = 1$ olduğu gözönüne alınarak,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1^n + b_2^n + ... + b_m^n} = b$$

elde edilir.

Problem 5. $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n^2})^n$ limitini hesaplayınız.

Çözüme geçmeden önce bu tip limitler için gözönüne alacağımız "ünlü limiti" hatırlatalım:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e; \quad (e \approx 2,718281845...).$$

Çözüm. Şimdi bu limit vasıtasıyla yukarıdaki problemi çözebiliriz.

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n^2})^n = \lim_{n\to\infty} e^{nln(1+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n.n}{n}ln(1+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}ln(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}} = e^{0\ lne} = 1.$$

Problem 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln(n!)}{n^3} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} ln(n!) &= ln1 + ln2 + ln3 + ... + lnn \\ &< 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$0 < \frac{ln(n!)}{n^3} < \frac{n(n+1)}{2n^3} \Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{ln(n!)}{n^3} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^3} = 0$$

olduğundan, Sandeviç Teoremine göre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln(n!)}{n^3} = 0$ olur.

Problem 7. $a > b > 0$, $a_1 = a, b_1 = b$ ve $a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+b_{n-1}}$, $b_n = \frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1}+b_{n-1}}$ olduğuna göre $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ve $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin limitlerini bulunuz.

Çözüm. $n = 1, 2, ...$ için $a_n,\ b_n > 0$ dır.

$$a_n - b_n = \frac{a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2}{a_{n-1} + b_{n-1}} = a_{n-1} - b_{n-1} = a_{n-2} - b_{n-2} = ... = a_1 - b_1 = a - b$$

dir.

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^2 = \left(\frac{b_{n-2}}{a_{n-2}}\right)^{2^2} = ... = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{2^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2^n}$$

bulunur. $0 < \frac{b}{a} < 1$ olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ olur. Öte yandan , $a_n - b_n = a - b$, $(n = 1, 2, ...)$ eşitliğinden $b_n = a_n - (a - b)$ bularak yukarıdaki eşitlikte yazarsak,

$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{a-b}{a_n}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a-b}{a_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a - b$. Sonuçta, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n - (a-b) = a - b - (a-b) = 0$ bulunur.

Limit kavramının çok önemli bir uygulaması da sonsuz toplamlar (seriler) incelenirken ortaya çıkıyor. Başlı başına bir ciddi matematiksel konu olan seri kavramına çok girmeden, lise matematiğinde sık-sık karşımıza çıkan sonsuz ondalık kesirlere biraz değinelim. Model olarak aşağıdaki ondalık kesri ele alalım.

$$0,33333.... = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + ...$$

Şimdi yukarıdaki sonsuz toplama bir anlam vermeye çalışalım.

Bunun için, $a_1 = \frac{3}{10}$, $a_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100}$, $a_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}$,..., $a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ... + \frac{3}{10^n}$,... şeklinde bir dizi tanımlayalım. Eğer a_n' nin limiti varsa bu limit değeri yukarıdaki "sonsuz toplam" 'ın değeri olarak kabul ediliyor. Şimdi a_n 'nin limitini hesaplayalım.

$$a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ... + \frac{3}{10^n}$$

ifadesinden

$$\frac{1}{10}a_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + ... + \frac{3}{10^{n+1}}$$

elde edilir. Sonra $a_n - \frac{1}{10}a_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}} = \frac{3}{10}(1 - \frac{1}{10^n})$ bulunur. Dolayısıyla, $\frac{9}{10}a_n = \frac{3}{10}(1 - \frac{1}{10^n})$ veya $a_n = \frac{3}{9}(1 - \frac{1}{10^n})$ dir. Açıkça $n \to \infty$ için $\frac{1}{10^n} \to 0$ dır. Böylece $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$ olur. Sonuç olarak, sonsuz toplam'ın değerini, $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ... + \frac{3}{10^n} + ... = \frac{1}{3}$ olarak yazabiliriz.

Bu tipteki diziler için bir diğer problem de şöyledir:

Problem 8. Bir top düz bir yüzeye 50 m. yukarıdan bırakılıyor. Top yere her düşüşünden sonra bir önceki yüksekliğinin $\frac{1}{3}$ 'ü kadar bir yüksekliğe geri sıçrıyor. Topun aldığı toplam yolu bulunuz.

Çözüm. Burada alınan yolu, yine bir dizinin limiti şeklinde ifade etmeye çalışalım. Bu dizinin terimleri $S_1 = 50$, $S_2 = 50 + 2.50.\frac{1}{3}$, $S_3 = 50 + 2.50.\frac{1}{3} + 2.50.\frac{1}{3^2}$, ,,, $S_n = 50 + 2.50.\frac{1}{3} + ... + 2.50.\frac{1}{3^n}$ biçimindedir. Sonuç olarak, alınan toplam yol $\lim_{n\to\infty} S_n$ limitidir. Şimdi bu limiti hesaplayalım. $S_n = 50 + 2.50(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n})$ dir. Parantez içindeki ifadenin $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})$ olduğu bir önceki problemden kolayca görülebilir. Buradan $S_n = 50 + 50(1 - \frac{1}{3^n})$ olur. Dolayısıyla toplam yol, yani, $\lim_{n\to\infty} S_n = 50 + 50(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n}) = 50 + 50 = 100$ m. dir.

KAYNAKLAR

[1] Karakaş, H.İ. ; Aliyev, İ:, *Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri*, TÜBİTAK, 1998.

[2] Balcı, M:, *Analiz I-II*, Ankara Üniversitesi Yayınları, 1996.

[3] Spivak, M:, *Calculus* , Matematik Vakfı Yayınları, No:6, Ankara,1997.

[4] Özdeğer, A. ; Özdeğer N:, *Analiz Problemleri*, İ.T.Ü. Yayınları, 1995.