İKİNCİ ÇEŞİT STİRLİNG SAYILARI

Halil Oruç

Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Tınaztepe Kampüsü, 35160, Buca, İzmir

halil.oruc@deu.edu.tr

Bu yazıyla amaçlanan ikinci çeşit Stirling sayılarını tanıtmaktır. Dolayısıyla, bir takım yeni sonuçlardan bahsetmektense, Stirling sayılarının çeşitli konularda nasıl ortaya çıktığını veriyoruz. Yazıda bahsedilen tüm sonuçlar kaynaklarda verilen kitaplardan bulunabilir. Bu sayılar için, Fibonacci sayıları gibi bir cemiyeti, ya da bilimsel bir dergisi (Fibonacci Quarterly) olmasa da, kombinatorik analiz ve sayısal analiz gibi değişik alanlarda karşımıza çıkar. İkinci çeşit Stirling $S(n,k)$ sayısı şöyle tanımlanır: n-elemanlı bir kümenin k parçalı bölüntülerinin sayısı. Bir X kümesinin bölüntüsü, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ parçalarından oluşan öyle altkümeler topluluğudur ki X'in her elemanı bu altkümelerin sadece birinde yer alır:

$$X = X_1 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_k, \quad X_i \cap X_j = \emptyset, \quad (i \neq j).$$

Bir örnek verecek olursak; $A = \{a,b,c,d\}$ dört elemanlı bir küme ve $k = 2$ parça, için bölüntüler şöyledir:

$$\{\{a,b\},\{c,d\}\}; \{\{a,c\},\{b,d\}\}; \{\{a,d\},\{b,c\}\}; \{\{a,b,c\},\{d\}\};$$

$$\{\{a,b,d\},\{c\}\}; \{\{a,c,d\},\{b\}\}; \{\{a\},\{b,c,d\}\}.$$

Yani $S(4,2) = 7$. Buna benzer özel sayılar için bir rekurans bağıntı bulmak, pratik hesaplamalar için oldukça önemlidir. Bu işlem genelde, kümenin bir elemanını ayırarak geri kalanları benzer biçimde saymayla ifade edilir. Yukarıdaki örnekte d elemanını bölüntülerden atarsak geriye kalanlar arasında $S(4,2) = S(3,1) + 2S(3,2)$ olduğunu görürüz.

Teorem 1.

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), \quad 1 \leq k \leq n-1. \tag{1}$$

İspat. X, n-elemanlı bir küme, $S(n,k)$ da k parçalı bölüntülerinin sayısı olsun. Özel durumlar için, $n > 0$ iken $S(n,0) = 0, S(n,1) = 1, S(n,n) = 1$, (sırasıyla, boş olmayan kümenin boş küme bölüntüleri, kümenin kendisi ve elemanlarının teker teker yazılması) olduğu açıktır. $x \in X$ olsun. Her bölüntü şu iki özellikten yalnızca birini sağlar. **(i)** $\{x\}$ bir parça olarak yer alır, **(ii)** x tek başına değil de, yanında başka elemanlar da vardır. Birinci durumu saymak basit görünüyor. Çünkü $X\backslash\{x\}$ kümesini göz önüne alırsak, eleman sayımız bir azaldı, $n-1$ oldu ve parça sayısı da bir azaldı, $k-1$. Dolayısıyla $S(n-1,k-1)$ tane (i) durumda bölüntü var. Diğerini saymak biraz daha problemli. (ii) durumunda X'in bir P bölüntüsündeki parçalar $X_1, X_2, \ldots, X_k$ olsun. Buradan x elemanını atmak (j, P') gibi bir ikili belirlemek demektir. Öyleki P', $X\backslash\{x\}$ kümesinin bir bölüntüsü olur. Yani $n-1$ elemanlı $X\backslash\{x\}$ kümesinin P' bölüntüsü $\{X_1, X_2, \ldots, X_j\backslash\{x\}, X_{j+1}, \ldots, X_k\}$ biçimindedir. Burada j, k farklı değer alabilir ve parça sayısı değişmediğinden P gibi $kS(n-1,k)$ tane bölüntü vardır. Yani, $kS(n-1,k)$ tane (ii) türünden bölüntü olduğu bulunur. Böylece (1) ispatlanmış olur. Yukarıdaki rekurans bağıntısından yararlanarak aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

Tablo 1. İkinci çeşit Stirling sayıları

$S(n,k)$	$\downarrow k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=1$	1				
$n=2$	1	1			
$n=3$	1	3	1		
$n=4$	1	7	6	1	
$n=5$	1	15	25	10	1

Okuyucu $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$, $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ olduğunu birkaç yolla gösterebilir. Yine tablodan görüldüğü gibi her sabit n için, k değiştikçe $S(n,k)$ sayılarının düzgün bir şekilde artıp bir tepeye ulaştıkları ve düzgün biçimde azaldıkları görülüyor. Bir başka söyleyişle dizinin şekli hakkında bilgi veriyor. Bu tür diziler oldukça sık karşımıza çıkar. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dizisinde $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_r = \cdots = a_s \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n$, sağlayan r, s indisleri varsa bu diziye *tektepe*[1] (unimodal İng.) dizi diyeceğiz. En tanıdıkları binom sayılarıdır. Binom sayılarının ardışık terimlerinin oranını

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n-k+1}{k},$$

1 ile karşılaştırırsak, bu sayıların tektepe dizi oldukları görülür. Genelde bu özelliği göstermek böyle kolayca olmaz. Bu tür problemlere el atmanın bir yolu, diziyi ***üreten fonksiyonun*** köklerini incelemektir. $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sonsuz bir dizi olsun. Bu dizinin üreten fonsiyonu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gibi bir seridir. ***Fibonacci sayılarının*** üreten fonsiyonunu bulma örneği ile başlayalım. Fibonacci sayıları, $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad f_0 = 0, f_1 = 1, \quad n \geq 2 \tag{2}$$

rekurans bağıntısı ile hesaplanır. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ veren bir $f(x)$ fonksiyonunu bulmak için (??) ifadesini x^n ile çarpalım ve $n \geq 1$ den itibaren toplayalım. Sol tarafı

$$f_2 x + f_3 x^2 + \cdots = \frac{1}{x}(f(x) - x),$$

sağ tarafı ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} x^n = f(x) + x f(x).$$

Son iki denklemi eşitlersek, Fibonacci sayılarının üreten fonksiyonunu

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

olarak elde ederiz. Bu ifade pek fazla birşey anlatıyormuş gibi görünmüyor. Kesirli fonksiyon biçimine getirelim.

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{(1 - g_+ x)} - \frac{1}{(1 - g_- x)}\right), \quad g_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Denklemin sağ tarafını seriye açarsak

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_+^k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} g_-^k x^k\right),$$

[1] Engin Mermut tarafından önerilen kelime.

f_n terimini

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

olarak buluruz. Metod üzerinde diğer ayrıntılar için bakınız Wilf [6]. Stirling sayılarının rekurans denklemine (??) bakarsak durum biraz daha karışık. Hem n, hem de k değişmekmektedir. Üreten fonksiyonu için muhtemel adaylar şunlardır:

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)x^k, \quad B_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)x^n.$$

Daha çok $A_n(x)$ ile ilgileneceğiz. Ancak, $B_k(x)$ in elde edilişi de oldukça ilginçtir. Wilf [6] kısaca şöyle yapar. Rekurans denklemi (??) x^n ile çarpıp, kaydıralım. Bulunan ifadeyi, parçalı kesir olarak yazın. Her terimi seriye açtıktan sonra elde edilen ifadenin x^n li teriminin katsayısı

$$S(n,k) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}. \tag{3}$$

Bu ifadeyi $k!/k!$ ile çarparsak

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r}\binom{k}{r} r^n \tag{4}$$

bulunur. Şimdi, $k = n$ alırsak

$$\sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r}\binom{n}{r} r^n = n! \tag{5}$$

gibi oldukça etkileyici bir özdeşlik karşımıza çıkar. Bu özdeşlik Kaderoğlu [4] te "*$n+1$ tane ardışık doğal sayının n'ninci kuvvetlerinin n'ninci farkları $n!$ eşittir*" teoremi olarak verilmiştir. $S(n,k)$' nin başka bir yorumu da, (??) ifadesinin n-elemanlı bir kümeden k-elamanlı bir kümeye oluşturulan *örten fonksiyonların* sayısıdır (n tane eleman, k tane özdeş kutuya dağıtılıyor, hiçbir kutu boş kalmamak koşuluyla), bakınız Grimaldi [3], Brualdi [2] de Dahil-Hariç Kuralı (Principle of Inclusion and Exclusion, İng.) İnterpolasyon tekniklerine aşina olan okuyucuya (??) tanıdık gelecektir. Bir $f(x)$ fonksiyonunun, $x_0, x_1, \ldots, x_n$'deki $n+1$ farklı değeri verilsin. n'inci dereceden interpolasyon polinomu $p_n(x)$, $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$ sağlar. Bu ise Newton formunda

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\ldots,x_k]\,\omega_k(x) \tag{6}$$

olarak bilinir. Bakınız Phillips [5]. Burada

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}), & 1 \le k \le n \end{cases}$$

ve

$$f[x_0] = f(x_0), \quad f[x_0,\ldots,x_k] = \frac{f[x_1,\ldots,x_k] - f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

bölünmüş farklar olarak tanımlanır. İnterpolasyon noktaları eşit aralıklı ise, $x_k = x_0 + kh$, h adım ölçüsü, x_0 başlangıç noktası, yukarıdaki (??) özel bir hal alır. $f(x_{k+1}) - f(x_k) = \Delta f(x_k)$ yazalım. Δ ileri farklar operatörüdür. Bölünmüş farkların rekurans bağıntısı da

$$\Delta^{j+1} f(x_k) = \Delta(\Delta^j f(x_k)) = \Delta^j f(x_{k+1}) - \Delta^j f(x_k)$$

ileri farklar bağıntısı olur. Bunu kullanarak

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\, h^k} \tag{7}$$

elde ederiz. Doğruluğunu tümevarımla gerçekleştirebileceğimiz, ileri farklar operatörünü açık bir şekilde yazabiliriz

$$\Delta^k f(x_0) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} f(x_r). \tag{8}$$

Şimdi, $f(x) = x^n$ ve $x_r = r$, $r = 0, 1, \ldots, k$ için, (??), (??) ve (??) kullanarak

$$S(n,k) = f[0, 1, \ldots, k], \quad f(x) = x^n$$

bulunabilir. İnterpolasyon operatörü polinomlar uzayında bir *yansıtma operatörü* olduğundan, (bakını Phillips [5], interpolasyon hata formülünü kullanın) yani f bir polinomsa $f(x) = p_n(x)$, şu sonucu çıkarabiliriz:

Teorem 2.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, x(x-1)\cdots(x-(k-1)). \tag{9}$$

Görüldüğü gibi $S(n,k)$ için, yeni bir üreten fonksiyon bulduk. Bu, tabiki tümevarımla da ispatlanabilir. (Sol tarafı x ile çarparken, sağ tarafı $(x-k+k)$ ile çarpın.) $S(n,k)$'yı $n \times n$ alt üçgen matrisin elemanları olarak düşünürsek, bu matris bize $[x, x^2, \ldots, x^n]$ molinomlar bazından, $[x, x(x-1), \ldots, x(x-1)\cdots(x-(n-1))]$ bazına geçiş matrisini temsil eder. Ancak hala $S(n,k)$ nin tektepe dizi olduğunu gösterme yolunda ip ucu elde etmiş değiliz. Bunun için daha kuvvetli bir özelliğe ihtiyacımız var, logaritmik içbükey, *log içbükey*. Önce bir fonksiyonun içbükeyliği ile başlayalım. Reel f fonksiyonunda her $x < y$ için $f((x+y)/2) \geq (f(x)+f(y))/2$ sağlanıyorsa f' ye içbükey denir. Geometrik olarak, f fonksiyonu üzerinde iki noktayı birleştiren çizgi o aralıkta f fonsiyonunun her zaman altında kalır. Benzer biçimde, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ pozitif sayılarından oluşan bir dizi

$$(\log c_{k-1} + \log c_{k+1})/2 \leq \log c_k$$

sağlıyorsa log içbükey denir. Bu tanımın her iki tarafını üstel fonksiyona çevirirsek şuna denktir:

$$c_{k-1} c_{k+1} \leq c_k^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Eğer bir dizi tektepe değilse, $c_{r-1} > c_r < c_{r+1}$ gibi ardışık terimleri vardır. Buradan görüldüğü gibi $c_0, c_1, \ldots, c_n$ dizisi log içbükey olamaz. *O halde,* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *dizisi log içbükey ise tektepedir.*

Teorem 3. $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$, *tüm kökleri reel ve negatif olan bir polinom olsun. O halde,* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *dizisi log içbükeydir.*

Özünde Rolle Teoremi'ni polinomlar için ard arda kullanarak elde edilen sonuç oldukça kuvvetli, çarpıcı güzellikte. Bakınız Wilf [6]. Bunu kullanarak $S(n,k)$'nın tektepe dizisi olduğunu ispatlamak için, üreten fonsiyonun köklerinin reel ve negatif olduğunu göstermemiz gerekiyor. Bunun için $A_n(x)$'i ve (??) kullanacağız. Önce $D_x A_n(x)$ bakalım, D diferansiyel operatörü,

$$D_x A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k S(n-1,k) x^{k-1}.$$

Sabit $n > 0$ alalım ve (??)'i x^k ile çarpıp k değişkeninden toplayalım. Şu ifade çıkar;

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} S(n-1,k-1)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} kS(n-1,k)x^k \\ &= xA_{n-1}(x) + xD_x A_{n-1}(x), \quad A_0(x) = 1. \end{aligned} \tag{10}$$

(??)'u kullanarak $A_n(x)$'i birkaç adım hesaplayalım.

$$A_1(x) = x, \; A_2(x) = x + x^2, \; A_3(x) = x + 3x^2 + x^3, \ldots$$

(??)'u düzenleyip e^x ile çarpımının sonucunu şöyle yazabiliriz

$$e^x A_n(x) = x(e^x A_{n-1}(x))' \tag{11}$$

Tümevarımla, her $n = 1, 2, \ldots,$ için $e^x A_n(x)$ fonksiyonunun n tane reel, negatif ($x = 0$ hariç) farklı kökünün olduğunu göstereceğiz. Bunun, $n-1$ için doğru olduğunu var sayalım. Temel analizden hatırlayacağımız Rolle Teoremi $(e^x A_{n-1}(x))'$ fonsiyonunun $n-2$ tane kökünün olduğunu verir. x ile çarpılması sonucunda, $e^x A_n(x)$ köklerinin sayısı $n-1$ oldu. Son bir tane ise şu gözlemle ortaya çıkar. $e^x A_{n-1}(x)$ fonksiyonu, $A_{n-1}(x)$ bir polinom oldugu için, $x \to -\infty$ gittikçe sıfıra doğru yaklaşır, $e^x A_{n-1}(x) \to 0$. Yine Rolle Teoremi'nden $e^x A_{n-1}(x)$ fonksiyonunun en solunda yer alan kökünün solunda bir tane kök vardır diyebiliriz. Böylece $e^x A_n(x)$ nin n tane kökünü bulduk. Şimdi şu sonucu söyleyebiliriz.

$S(n,k)$ sayıları log içbükey, dolayısıyla tektepedir.

Son olarak Teorem 3' ü tartışalım. Önce Rolle Teoremi'ni hatırlayalım. $f(x)$ fonksiyonu sürekli ve (a,b) aralığında diferansiyallenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise $a < t < b$ gibi bir yerde $f'(t) = 0$. f'yi n'inci dereceden tüm kökleri reel olan bir polinom alalım. Rolle Teoremi' ni art arda uygularsak, f' nin türevlerinin kökleri de reel olması gerekir. Eğer x_0 da m tane çakışık kök varsa, $f'(x) = (x-x_0)^{m-1}g(x)$ biçiminde yazılabilir ve $g(x)$ in kökleri de reeldir. Bir başka gözlem de şudur:

$$f(x,y) = c_0x^n + c_1x^{n-1}y + c_2x^{n-2}y^2 + \cdots + c_ny^n, \quad y \neq 0 \tag{12}$$

gibi tüm kökleri reel, bir polinom olsun. Bunu

$$y^{-n}f(x,y) = c_0t^n + c_1t^{n-1} + c_2t^{n-2} + \cdots + c_{n-1}t + c_n, \quad t = \frac{x}{y}$$

şekline getirebiliriz. Yani, kökleri x/y biçimindedir. Yukarıdaki gibi $f(x,y)$' nin türevlenmelerinden elde edilen $g(x,y)$ polinomunun kökleri de reeldir. Tüm bunlardan sonra (??)'de $f(x,y)$'ye $D_x^m D_y^{n-m-}$ diferansiyel operatörünü uygulayalım. Şu üç terim geriye kalır

$$c_{n-m-2}(n-m-2)!\,\frac{(m+2)!}{2}\,x^2 + c_{n-m-1}(n-m-1)!\,(m+1)!\,xy +$$

$$c_{n-m}m!\,\frac{(n-m)!}{2}\,y^2.$$

Bu ifadeyi $(n-m-1)!(m+1)\cdots 3$'e bölümünden

$$c_{n-m-2}\frac{m+2}{n-m-1}x^2 + c_{n-m-1}2xy + c_{n-m}\frac{n-m}{m+1}y^2$$

bulunur. Son çıkardığımız ifadede $c_j = \binom{n}{j} p_j$ yazalım,

$$\binom{n}{n-m-2}\frac{m+2}{n-m-1}p_{n-m-2}\,x^2 + \binom{n}{n-m-1}2p_{n-m-1}\,xy +$$
$$\binom{n}{n-m}\frac{n-m}{m+1}p_{n-m}\,y^2.$$

Sadeleştirmeleri yapalım

$$\binom{n}{m+1}\left\{p_{n-m-2}\,x^2 + 2p_{n-m-1}\,xy + p_{n-m}\,y^2\right\}$$

Bu ikinci derece denklemin köklerini reel yapmamız gerekiyor. Yani diskriminantı negatif olmamalı. Dolayısıyla,

$$p_{n-m-1}^2 \geq p_{n-m-2}p_{n-m}.$$

Bu ise, p'lerin log içbükey dizi oldugunu gösterir. Şimdi de $p_j = \frac{1}{\binom{n}{j}} c_j$ yazalım ve gerekli sadeleştirmele yapalım,

$$c_{n-m-1}^2 \geq \frac{(m+2)(n-m)}{(m+1)(n-m-1)}c_{n-m-2}c_{n-m} \geq c_{n-m-2}c_{n-m}.$$

Yani c'ler de log içbükey dizidir.
Kombinatorik özdeşliklere, rekurans bağıntılarına daha genel bakmanın yollarından biri *simetrik fonksiyonlardır.* Buraya kadar yapılanlar hoşunuza gittiyse Brenti [1] nin sonuçları ve çözülmemiş problemlerinden de hoşlanacaksınız.

Uzman bir problem çözücü birbiriyle bağdaşmaz iki özelliğe sahip olmalıdır; dur durak bilmeyen bir düş gücü ve sabırlı bir ısrarcılık.

Howard W. Eves

KAYNAKLAR

[1] Brenti, F., *The Applications of Total Positivity to Combinatorics, and Conversely,* Total Positivity and Its Applications, M. Gasca, C.A. Michelli edt. 451–473, Kluwer Academic Publ., 1996.

[2] Brualdi, R., Introductory Combinatorics, Prentice-Hall Inc, 2nd ed. 1992.

[3] Grimaldi, R.P., Discrete and Combinatorial Mathematics, Addison-Wesley Longman Inc., 4th. ed. 1999.

[4] Kaderoğlu, B., Akıldan çarpma Tekniği, 3. baskı, İzmir 1992.

[5] Phillips, G.M., Two Millennia of Mathematics From Archimedes to Gauss, Springer Verlag, New York, 2000.

[6] Wilf, H.S., Generatingfunctionology, Academic Press, London, 2nd ed., 1994.