PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 15 Nisan 2002 tarihine kadar gönderiniz.

Açıklama: Yarışma Sorularının doğru çözümlerini gönderenlerin isimleri dergide belirtilecektir.

– 2002 senesi boyunca en fazla doğru çözüm gönderenler arasından en az ilk 3 kişiye ödül olarak Matematik Dünyası 2003 yılı aboneliği ve yazarların imzası ile Matematik kitapları verilecektir.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.251. 2002^{2002} sayısının son iki basamağını bulunuz.

A.252. $ABCD$ paralelkenarında AC köşegeni BD köşegeninden daha uzundur. $BCDM$ bir kirişler dörtgeni olacak şekilde AC köşegeni üzerinde bir M noktası alınmıştır. BD doğrusunun, ABM ve ADM üçgenlerinin çevrel çemberlerine teğet olduğunu kanıtlayınız.

A.253. 4x4 boyutlu bir satranç tahtasının karelerine, hepsi aynı zamanda 0 olmayacak şekilde öyle sayılar yazınız ki, her sayı komşusundaki sayıların toplamına eşit olsun (bir ortak kenara sahip karelere komşu denir).

A.254. Her a, b, c pozitif sayıları için

$$a^4 + b^4 + c^2 \geq 2\sqrt{2}abc$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız.

A.255. 1997-2001 yıllarında inceleme yapan bir meteoroloji uzmanı her günü soğuk, serin veya sıcak diye kaydetmiş. Bu yılların birinde serin günler soğuk günlerden, sıcak günler de serin günlerden aynı sayı kadar fazla olmuş. Bu hangi yıldı?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.251. n ve b pozitif tam sayıları için $V(n, b)$ ile n sayısının, her çarpan b'den büyük olacak şekilde çarpanlara ayrılma sayısını gösterelim. (örneğin, $48 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 6 \cdot 8$ olduğundan $V(48, 2) = 5$'dir). Her n ve b pozitif tam sayıları için $V(n, b) < \frac{n}{b}$ olduğunu gösteriniz.

Y.252. $ABCD$ dikdörtgeninin AB, BC, CD, DA kenarları üzerinde sırasıyla K, L, M, N noktaları verilmiştir. $KL||MN$ ve $KM \perp LN$ olduğu bilinir. KM ve LN doğru parçalarının kesişim noktasının BD köşegeni üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

Y.253. Ağırlıklarına göre sıralanmış 100 tane gümüş parçası ve yine ağırlıklarına göre sıralanmış 101 tane altın parçası verilmiştir. Bütün parçaların ağırlıkları farklıdır. Çift kollu teraziyi kullanarak en az kaç tartıyla ağırlığına göre 101. sırada bulunan parça bulunur?

Y.254. Her $a > 1$ ve $b > 1$ sayıları için

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Y.255. 1'den farklı ve 2002'den küçük ve ikişer ikişer aralarında asal olan 15 tane pozitif tam sayıdan en az birinin asal olduğunu kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.241. $a^2 + 2cd + b^2$ ve $c^2 + 2ab + d^2$ sayıları tam sayıların kareleri olacak şekilde birbirinden farklı a, b, c, d pozitif tamsayıları bulunuz.

Çözüm. $ab = cd$ ise,

$$a^2 + 2cd + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

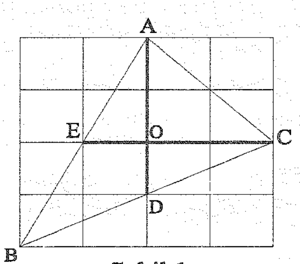
ve

$$c^2 + 2ab + d^2 = (c + d)^2$$

Böylece $ab = cd$ olacak şekilde birbirinden farklı a, b, c, d sayılarını bulmamız yeterlidir. Örneğin $a = 2; b = 6; c = 3; d = 4$ alabiliriz.

A.242. Kareli kağıt üzerinde, köşeleri karelerin köşelerinde bulunan ve iki kenarortayı birbirine dik olan bir üçgen çiziniz.

Çözüm. Önce $|AO| = 2|OD|; |OC| = 2|OE|$ ve $AD \perp EC$ alıyoruz. AE ile CD'nin kesişim noktasını B ile göstererek ABC üçgenini elde ederiz (bkz. Şekil 1).



Şekil 1

A.243. Doğru üzerinde bir kaç nokta alındı Sonra her iki komşu nokta arasında bir nokta daha alındı. Bu işlem iki kez daha yapıldı (toplam üç kez). Sonuçta doğru üzerinde 113 nokta olduğuna göre başlangıçta kaç nokta alınmıştır?

Çözüm. Başlangıçtaki nokta sayısı x ise, birinci işlemden sonra nokta sayısı $x + x - 1 = 2x - 1$, ikinci işlemden sonra $2(2x-1)-1 = 4x-3$, üçüncü işlemden sonra $2(4x - 3) - 1 = 8x - 7$ olacak. $8x - 7 = 113$ denkleminden $x = 15$ elde ederiz.

A.244. Kesrin payı ve paydası, toplamları 101 olan pozitif tam sayılardır. Kesrin $\frac{1}{3}$' ten büyük olmadığı biliniyor. Bu kesir en fazla kaç olabilir?

Çözüm. Kesrin payı n olsun. $\frac{n}{101-n} \leq \frac{1}{3}$ eşitsizliğinden $n \leq 25$ elde ederiz. Dolayısıyla, kesir en fazla $\frac{25}{76}$ olabilir.

A.245. $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$ ise , $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ ve $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ denklemlerinden hiç değilse birinin reel kökünün bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. Bu 2. dereceden polinomların diskriminantlarını Δ_1 ve Δ_2 ile gösterirsek,

$$\Delta_1 + \Delta_2 = p_1^2 - 4q_1 + p_2^2 - 4q_2 \geq$$

$$2p_1p_2 - 4(q_1 + q_2) = 0$$

olduğundan Δ_1 ve Δ_2 sayıların en az biri negatif değildir. O halde uygun polinomun kökü bulunur.

Y.241. a, b, c pozitif tam sayıları için $a.b + b.c = c.a$ eşitliği sağlanır.

$$OKEK(a, b) = OKEK(b, c) = OKEK(c, a)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Sayılardan her birinin (diyelim, c'nin) diğer ikisinin (a ve b'nin) OKEK'ini böldüğünü göstermemiz yeterlidir. c'nin herhangi bir p asal bölenini alalım. $OBEB(c_1, p) = 1$ olacak şekilde $c = p^m c_1$ olsun. p^m'nin $OKEK(a, b)$ sayısını böldüğünü göstermemiz yeterli olacaktır.

$$OBEB(a_1, p) = OBEB(b_1, p) = 1$$

olacak şekilde $a = p^n a_1$ ve $b = p^k b_1$ alalım. $k \geq n$ olsun ($k < n$ durumu benzer şekilde incelenir). $p^n|(a - b)$ elde ederiz. $ab = p^{n+k}a_1b_1$ ve $OBEB(a_1b_1, p) = 1$ olduğundan $n + m \leq n + k$, buradan da $m \leq k$ elde ederiz. O halde $p^m|b$ ve $p^m|OKEK(a, b)$'dir.

Y.242. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde AC ve BD köşegenleri birbirine diktir, AB ve CD kenarları da paralel değildir. AB ve CD kenarlarının orta dikmeleri, $ABCD$ dörtgeninin içerisindeki bir P noktasında kesişmektedir. $ABCD$ ' nin bir kirişler dörtgeni olması için ABP ve CDP üçgenlerinin alanlarının eşit olmasının gerek ve yeterli olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $ABCD$ bir kirişler dörtgeni olsun. O halde P noktası çevrel çemberin merkezi ve $|PA| = |PB| = |PC| = |PD|$ olacak (Şekil 2).

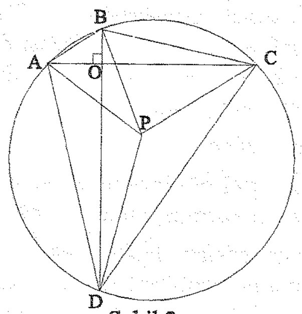
$$s(\widehat{APB}) + s(\widehat{CPD}) = s(\breve{AB}) + s(\breve{CD}) =$$

$$2s(\widehat{ADB}) = 180° \text{ olduğundan}$$

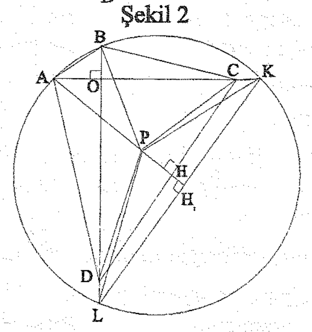
$$A(\overset{\triangle}{APB}) = \frac{1}{2}|PA| \cdot |PB| \cdot \sin(\widehat{APB})$$

$$= \frac{1}{2}|PC| \cdot |PD| \cdot \sin(\widehat{CPD}) = A(\overset{\triangle}{CPD})$$

elde edilir. Şimdi $A(\overset{\triangle}{APB}) = A(\overset{\triangle}{CPD})$ olduğu halde, $ABCD$'nin kirişler dörtheni olmadığını varsayalım. Genelliği kaybetmeden $|PA| = |PB| > |PC| = |PD|$ olduğunu kabul edebiliriz. Merkezi P noktasında bulunan ve yarıçapı



Şekil 2



Şekil 3

$|PA|$'ya eşit olan çemberle AC'nin uzantısının kesişim noktasını K, BD'nin uzantısının aynı çemberle kesişim noktasını L ile gösterelim (Şekil 3). PH ve PH_1, sırasıyla DPC ve LPK üçgenlerinin yükseklikleri olsun. PH_1 ile CD'nin kesişim noktasını N ile gösterelim. $|PH_1| > |PN| \geq |PH|$ ve $|KL| > |CD|$ olduğundan

$$A(K\overset{\triangle}{P}L) = \frac{1}{2}|PH_1| \cdot |CD| = A(CPD)$$

elde ederiz. Bu, bir çelişki oluşturduğundan $|PA| = |PB| = |PC| = |PD|$ eşitliğini, buradan da $ABCD$'nin bir kirişler dörtgeni olduğunu elde ederiz.

Y.243. İki kişi şöyle bir oyun oynuyorlar: Birinci kişi soldan sağa doğru A ve B harflerinden istediğini yazıyor (her hamlede bir harf). İkinci de her hamlesinde ya herhangi iki harfin yerini değiştiriyor, ya da hiçbir şey yapmıyor. İkinci kişi 2001 'er hamleden sonra elde edilen kelimenin soldan sağa ve sağdan sola okunduğunda aynı olmasını sağlayabilir mi?

Çözüm. Sağlayabilir: bunun için aşağıdaki stratejiyi izliyor. İlk 1000 hamlede hiç bir şey yapmıyor. Her $n > 1000$ için n. hamlede n. ve $(200 - n)$. harfler aynı ise, hiçbir şey yapmıyor. Bu harfler birbirinden farklı ise, bunlardan biri 1000. harften farklıdır. İkinci kişi bu harfle 1000. harfin yerlerini değişiyor.

Y.244. Pozitif tam sayılar kümesinde tanımlı olan $f(n)$ fonksiyonu

$$f(f(n)) + f(n) = \begin{cases} 2n-1, & n \text{ çift ise} \\ 2n+1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

koşulunu sağlıyorsa , $f(2001)$ 'i bulunuz.

Çözüm. $f(f(n))$'in anlamlı olması için $f(n)$ pozitif tam sayı olmalıdır. Koşulu $n = 1$ ve $n = 2$ için yazalım.

$$f(f(1)) + f(1) = 3$$

$$f(f(2)) + f(2) = 3$$

Buradan $f(1) = 1$ veya $f(1) = 2$ olabilir. Birinci durumda birinci denklemden $f(2) = 1$ elde edilir. Bu değerler eşitliklerini ikisini de sağlar. Şimdi tümevarımla her pozitif tam n için

$$f(2n-1) = 2n$$

$$f(2n) = 2n - 1$$

olduğunu gösterelim. Tüm $n \leq k$ değerleri için bu eşitliklerin sağlandığını varsayalım ve $n = k+1$ için de doğru olduğunu gösterelim. Koşuldan aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$f(f(2k+1)) + f(2k+1) = 4k+3$$

$$f(f(2k+2)) + f(2k+2) = 4k+3$$

$$f(2k+1) \leq 2k+1 \text{ olursa,}$$

$$f(f(2k+1)) + f(2k+1) \leq 2(2k+1) < 4k+3$$

elde edilir, dolayısıyla $f(2k+1) \geq 2k+2$'dir. $t = f(2k+1) > 2k+2$ olursa, $f(t) + t = 4k+3$ eşitliğinden $f(t) < 2k+1$ elde edilir. Koşuldan

$$f(f(t)) + f(t) \geq 2t - 1 > 2(2k+2) - 1 = 4k+3$$

diğer taraftan da

$$f(f(t)) + f(t) < f(t) + 1 + 2k + 1 <$$

$$2k+1+1+2k+1=4k+3$$

elde edilir. Böylece, f(2001)=2002'dir.

Y.245. İki yaya sabah aynı anda , biri A 'dan B 'ye , diğeri B 'den A 'ya sabit hızla yola çıktı. Öğle saatinde (saat 12 : 00'de) bunlar karşılaştılar ve yollarına devam ettiler 1. yaya akşam saat 4 : 00'da B 'ye , 2. yaya akşam saat 9 : 00'da A 'ya ulaştı. Yayalar sabah saat kaçta yola çıktılar?

Çözüm. Yayalar saat x'de yola çıkmış olsun. A'dan çıkan 1. yayanın hızını u, B'den çıkan 2. yayanın hızını da v ile gösterelim. Karşılaşana kadar 1. yayanın gittiği yol $(12-x)u$, 2. yayanın gittiği yol da $(12-x)v$ olacak. Bundan sonra 1. yaya $(12-x)v$ uzunluğundaki yolu 4 saatte, 2. yaya da $(12-x)u$ uzunluğundaki yolu 9 saatte gitmiştir. O halde aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\frac{(12-x)v}{u}=4$$

$$\frac{(12-x)u}{v}=9$$

Denklemleri taraf-tarafa çarparsak, $(12-x)^2=36$, buradan da $x=6$ elde ederiz. Böylece yayalar sabah saat 6'da yola çıkmışlar.

SİNEMA DÜNYASINDAN...

Drama dalında en iyi film ödülü (Altın Küre), **A BEATIFUL MIND** isimli filme verildi ve Oskar'a aday gösterildi. Sylvia Nasar'ın aynı adlı kitabından uyarlanan filmin konusu, 1994 yılında Oyun Teorisinde kullanılan "Nash Denklemleri" ile Ekonomi Bilimine yaptığı katkılardan dolayı Nobel Ekonomi ödülü alan deha matematikçi John Forbes Nashin dramatik hayatı. Matematikseverlere bu filmi izlemelerini ve ayrıca, Nash'in çalışmaları hakkında bilgi edinmek için de "Notices of AMS, volume 45, Number 10, page 1329" deki yazıyı okumalarını tavsiye ediyoruz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla,İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.