# FRAKTAL GEOMETRİ'DEN BİR KESİT

**Ünal Ufuktepe - İsmail Aslan**
e-posta: ufuktepe@likya.iyte.edu.tr, iaslan@likya.iyte.edu.tr
İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR

---

Matematiksel gerçekler veya doğruların niteliğinde var olan kesinliğin özünde aksiyomatik yapılar vardır. Öklit geometrisi, matematik tarihinde bunun önde gelen örneğidir. Matematiksel doğruların, çıkartılmış oldukları postulatlara bağlı olması koşullu bir doğruluğu gerektirmektedir. Hiperbolik, eliptik ve Riemann 'ın kurduğu Öklitçi olmayan geometriler ise matematikte postulatların doğruluğu ileri sürülerek işe başlanmadığını bizlere gösterdi. Evrenin yapısını tanımlamada kullanılan geometri kuramı, eliptik geometrinin bir genellemesi olabilir. Riemann bunu soyut matematik aracılığıyla oluşturmuştu. Fakat bu Einstein için bir süre sonra görecelik kuramının kurulmasında kavramsal bir araç olmuştu.

1924'de Varşova'da dünyaya gelen matematikçi Benoit Mandelbrot (gerçi bazı matematikçiler onun için "O bizden değildir" diyorlarsa da biz bu yargıyı bilim tarihçilerine bırakıyoruz), Amerika 'ya yerleşip IBM firmasında çalışmaya başladıktan sonra bilgisayar kullanarak göze hitap eden yeni bir matematiği keşfetmeye başladı. Mandelbrot'dan önce de bu konuda çalışmaların yapılmış olduğunu belirtmekte yarar var: Cantor kümesi, Peano eğrisi (1890), Hilbert eğrisi (1891), Koch eğrisi (1904), Sierpinski contası (1915) gibi.

Bir bağıntıyı formüle edip tanım kümesini belirledikten sonra o bağıntının grafiğini çizmek pek zor değildir. Fakat formülünü oluşturamadığımız dağların, bulutların, ağaçların ve bunlar gibi daha bir çok nesnenin resmini bilgisayarda gerçeğe çok yakın bir şekilde çizdirmek olanaklı mıdır? Mandelbrot bu konuda yaklaşık üç bin yıldır süregelen Öklit geometrisinin yetersiz kaldığını görür: "Bulutlar küre değildir, dağlar da koni değildir" diye itirazda bulunur. Doğadaki bu nesneleri matematiksel eğriler ile; daire, dörtgen, elips, silindir, küre, sinüs dalgaları gibi düzgün geometrik şekillerle göstermek pek gerçekçi değildir. Bu tür şekillerde ısrar edildiğinde ortaya soğuk bir yapı çıkar. Mandelbrot'un "fraktal geometri" diye tanımladığı geometrinin yansıttığı evren ise pütürlü ve pürüzlü bir evrendir: "Aklın gözüne göre, bir fraktal sonsuzu görebilmenin bir yoludur". Fraktal geometri girintili çıkıntılı, kırık, karmaşık, düğümlenmiş, bükülmüş nesnelerin, şekillerin geometrisidir. Nedir bu yeni geometrinin bizim bildik yaklaşık üç bin yılllık bir geçmişi olan Öklit geometrisinden farkı?

* Geleneksel değil, modern bir geometridir.
* Öklit geometrisindeki şekillerin belirli karakteristik büyüklükleri (dairenin yarıçapı, küpün ayrıtı gibi) vardır. Fraktallerin ise karakteristik bir çok büyüklüğü vardır.
* Fraktal şekiller kendine benzer şekillerdir; ölçek ya da büyüklükten bağımsızdırlar. Bir fraktal şekle ne kadar yakından bakarsanız bakın yine bütüne benzer bir şekil görürsünüz. Öklit geometrisindeki şekillerde ise durum böyle değildir.
* Öklit geometrisi, insanların yarattıkları nesnelerin tanımlanmasında kullanılır. Doğadaki nesnelerin ifade edilmesinde ise fraktaller kullanılır.
* Öklit geometrisinin cebirsel formüllerle ifade edilmesine karşın fraktaller algoritmik bir yapı ile elde edilir.

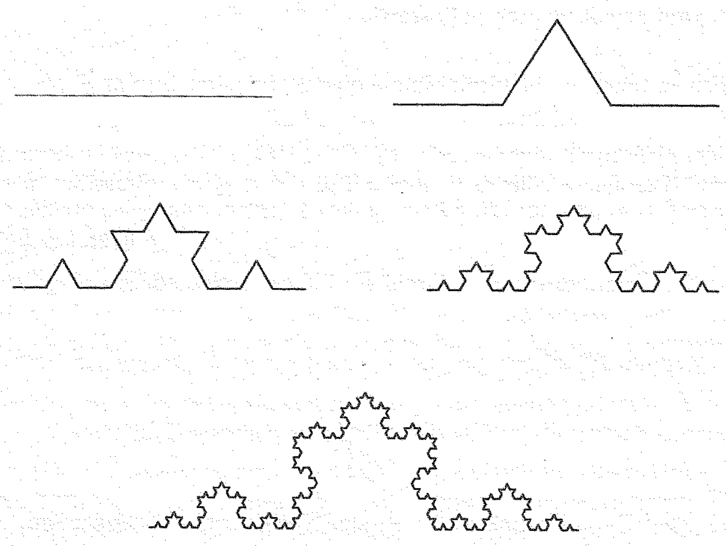
Evrenin karmaşıklığını anlamak için, her şeyden önce, bunun sadece gelişigüzellikten oluşmadığı konusunda şüphe duymak gerekir. Fraktal geometrinin tuhaf şekillerinin de bir anlamı vardır. Gelin, birlikte aşağıdaki algoritmayı, uzunluğu 9 birim olan bir doğru parçasına uygulayalım:

$A_1$ : Doğru parçasını üç eşit parçaya böl, ortadaki parça üzerine eşkenar üçgen kur.

$A_2$ : $A_1$'de elde edilen ortadaki parçayı sil.

$A_3$ : Oluşan her yeni doğru parçasına $A_1$ ve $A_2$'yi uygula.

Algoritmanın işletilmesi sonucu aşağıdaki şekilleri elde ederiz.



İşlemin başında doğru parçasının uzunluğu 9 birimdir. Birinci döngüde kırık çizginin toplam uzunluğu 12 birim, üçüncü döngüde 16 birim olur; ve kırık çizginin toplam uzunluğu böylece artarak devam eder. (Döngü sayısı arttıkça uzunluğun büyüdüğüne dikkat edin.) Peki bu artış hangi oranda olmaktadır? Kırık çizgilerin uzunlukları; ortak katı 4/3 ve genel terimi $9.(\frac{4}{3})^n$ olan bir geometrik dizi oluştururlar. Böylece, $n \to \infty$ için $9.(\frac{4}{3})^n \to \infty$ olduğundan, sonsuz uzunlukta bir eğri elde edilir(oysa, sabit uzunlukla işe başlamıştık!). Sonsuzuncu adımda(deyim yerindeyse) elde edilen şekil bir fraktal örneğidir. Bu arada, Koch eğrisi olarak isimlendirilen bu fraktalın boyutunun da $\frac{\log 4}{\log 3}$ olarak tanımlandığını belirtmek ilgi çekici olsa gerek. Yukarıda verdiğimiz örnekten de görüldüğü gibi, fraktallerin göz kamaştırıcı iki önemli özelliği;

- *Kendine-benzerlik*

  (Fraktale hangi ölçekte bakarsak bakalım, harhangi bir parçasını mercek altına alıp büyüttüğümüz yine kendisini görürüz.)

- *Kesirli boyut*

  (Verdiğimiz örnekte olduğu gibi, Koch eğrisinin boyutu $\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2618$ kesiridir.)

kavramlarıdır. Bu gözlem, eminiz, bir çoğunuzun kafasında değişik sorular uyandırıyordur: Türkiye sahil şeridinin uzunluğunu hesaplamak olanaklı mıdır? Ölçümlerin önce uydular aracılığıyla, sonra değişik açıklıklardaki pergel ile yapıldığını varsayalım. Öklit tarzı ölçümlerin (uzunluk, derinlik, kalınlık gibi), düzensiz şekillerin özünü yakalamakta yetersiz kaldıklarını görüyoruz. Yukarıdaki algoritma mantığı bize Cantor kümelerini hatırlatıyor. Benzer bir mantıkla Sierpinski contaları ve halıları elde edilmiştir. Başka örneklere geçmeden önce, fraktal oluşturmada kullanılabilecek bir yöntemden söz edelim.

Daha genel olarak, düzlemde ya da 3-boyutlu uzayda, bir $F^*$ kümesini başka bir $F$ kümesinden aşağıdaki adımları uygulayarak oluşturalım:

1. Bir $F$ kümesini, herbiri $F$ nın küçültülmüş kopyası olmak üzere, $n$ tane konguruent(benzer) altkümelere bölelim. Ayrıca $r$ sayısı da, oluşturulan altkümenin boyutunun $F$ nın boyutuna olan oranını, yani küçültme oranını göstersin.

2. Altkümelerden $m$ tanesini, diğerlerini ihmal ederek, tutalım. Bunlar $F_1, F_2, \ldots, F_m$ olsun.

3. Benzer şekilde, aynı kuralı uygulayarak, $F_1, F_2, \ldots, F_m$ altkümelerinin herbirini $n$ tane konguruent(benzer) altkümelere bölelim ve herbir $F_k$, $1 \leq k \leq m$, kümesinin $m$ tane alt kümesini tutalım.

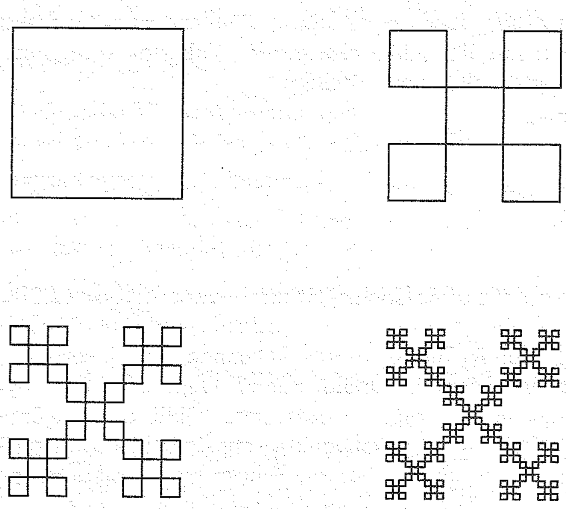
4. Bu işleme sonsuza kadar devam ederek bir $F^*$ kümesini elde edelim.

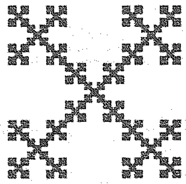
İşte bu yolla elde ettiğimiz $F^*$ kümesi bir fraktal oluşturur ve $F^*$ kümesinin fraktal boyutu da

$$\frac{\log m}{\log(\frac{1}{r})}$$

olarak tanımlanır. Verdiğimiz ilk fraktal örneğinde, Koch eğrisini oluştururken, $m = 4$ ve $r = \frac{1}{3}$ olduğuna dikkat edelim. Şimdi bir fraktal örneği daha verelim.

$F$ kümesini kenar uzunluğu 1 birim olan kare olarak alalım. Birinci adımda, kareyi 9 tane konguruent altkarelere bölerek, köşelerdeki 4 kareyi ve ortadaki 1 kareyi tutalım(diğerlerini atalım). Yaptığımız bu işlemi kalan karelere de ayrı ayrı uygulayarak, bu süreci sonsuz bir şekilde devam ettirdiğimizi varsayalım. Sonsuz adımda elde edilen kümeyi de $F^*$ ile gösterecek olursak aşağıdaki şekilleri elde ederiz:





İlk adımda 1 kare, ikinci adımda 5 kare, üçüncü adımda toplam 25 kare,...,elde edilir. Sonsuz adımda elde edilen şekil ise bir fraktaldır. Elbette bu resmi elle çizmek olanaksızdır. Bu tür yinelemeli işlemlerle elde edilen şekillerin yakınsadığı şekil ya da bunların topolojisi üzerine bugün matematikçiler ciddi bir şekilde çalışmaktadırlar. Türettiğimiz bu fraktal için, $m = 5$ ve $r = \frac{1}{3}$ olduğundan, $F^*$ ın boyutu $\frac{\log 5}{\log 3} \approx 1.4649$ dır.

Mandelbrot fraktal geometri kuramını ortaya koyunca boyut fikrine de yöneldi. Ona göre "Bizler üç boyutlu bir dünyada yaşıyoruz, bunun anlamı bir noktanın adresini belirlemek için üç sayıya ihtiyaç duymamız demektir. Buna göre bir düzlemin boyutu iki, bir doğrununki bir ve noktanın boyutu sıfırdır. Bu mantık bize Öklit geometrisinden miras kalmıştır" Ona bir iplik yumağının boyutu sorulduğunda, yanıtı: "Bu sizin bakış açınıza bağlı bir olay" şeklinde olmuştur. Mandelbrot burada sanki fizikçilere kendi geometrisini görücüye çıkartmak istediğini duyurmak istemektedir.

Bizleri bugün $0, 1, 2, 3, \cdots$ boyutlarını aşıp kesirli boyutlara yönelten sistem içinde, bir ölçüde kavram cambazlığı vardır. Kesirli boyut, açıklaması zorlukla yapılan ya da yapılamayan nitelikleri ölçmenin tanımlamanın bir yolu haline gelmiştir. Yeri gelmişken fraktal boyut tanımını verelim. Ancak, matematik bilginiz, aşağıdaki vereceğimiz kavramları anlamanıza yetmezse, bu bölümü atlayabilirsiniz.

$X$ uzayı soyut bir uzay olsun (örneğin reel sayılar kümesi; $C[0,1]$, $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi; $[0,1]$ kapalı aralığı ve benzeri gibi), ayrıca $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ise "metrik" adını verdiğimiz pozitif bir fonksiyon (örneğin $\mathbb{R}$ üzerinde bildiğimiz uzaklık fonksiyonu gibi) olsun. Bu durumda $(X, d)$ sıralı ikilisi bir "metrik uzay"ı olur. Buna ek olarak $X$ içindeki her bir "Cauchy dizisi" yakınsak olsun; başka bir deyişle $(X, d)$ metrik uzayı "tam" olsun. $X$ 'in boş olmayan bütün "kompakt" ("tıkız") altkümelerinin uzayını da $H(X)$ ile gösterelim. Fraktallerimiz $H(X)$ uzayında tanımlanacaktır. Bir $\epsilon > 0$ sayısı için $\epsilon$ yarıçaplı, $x_n$ merkezli bir yuvar $B(x_n, \epsilon)$ ve bir $A \in H(X)$ için $N(A, \epsilon) =$ en küçük pozitif $M$ tamsayısı öyle ki

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{M} B(x_n, \epsilon)$$

olsun.

**Tanım:** $A \in H(X)$ ve $(X, d)$ bir tam metrik uzay olsun. Her bir $\epsilon > 0$ için $N(A, \epsilon)$, yarıçapı $\epsilon$ olan ve bileşimleri $A$ 'yı örten yuvarların sayısının en küçüğü olmak üzere

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{ln(N(A, \epsilon))}{ln(\frac{1}{\epsilon})} = D$$

limiti varsa, bu değere $A$ kümesinin **fraktal boyutu** denir.

Bu tanımın ışığı altında aşağıdaki teoremleri ispatsız veriyoruz (bak. "Fractals Everywhere", Michail F. Bornsiey, 1993, Sayfa:171):

**Teorem 1.** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $A \in H(X)$, $C > 0$ ve $0 < r < 1$ için $\epsilon_n = Cr^n$ , $n = 1, 2, \cdots$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(N(A,\epsilon_n))}{ln(\frac{1}{\epsilon_n})} = D$$

limiti varsa, $A$ kümesinin fraktal boyutu $D$ 'dir. (Gerçekte bu teoremin ispatını sizler de yapabilirsiniz!)

**Teorem 2.** (Kare Sayma Teoremi) $A$, $H(\mathbf{R}^m)$ 'nin bir öğesi ve $A$, bir kenarı $\frac{1}{2^n}$ olan kapalı kare biçimli kutularla örtülmüş olsün. $N_n(A)$, $A$ 'yı örten ve bir ayrıtı $\frac{1}{2^n}$ olan kutuların sayısının en küçüğünü göstersin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(N_n(A))}{ln(2^n)} = D$$

limiti varsa, $A$ 'nın fraktal boyutu $D$ 'dir.

**Örnek 1.** $A = \square \subseteq \mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^2$ 'de herhangi bir kare) olsun: $N_1(\square) = 4, N_2(\square) = 16, \cdots, N_n(\square) = 4^n$ ise, Teorem 2 gereğince,

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{ln(N_n(\square)}{ln(2^n)} = 2$$

'dir.

**Örnek 2.** $A =$ Sierpinski üçgeni olsun; yani bir üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştiriliyor, ortaya 4 üçgen çıkıyor, ortadaki üçgen atılıyor ve bu işlem diğer 3 üçgen için tekrar ediliyor ve bu döngü sürüp gidiyor. Buna göre,

$$N_1(\triangle) = 3, N_2(\triangle) = 9, \cdots, N_n(\triangle) = 3^n$$

ve

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{ln(3^n)}{ln(2^n)} = \frac{ln3}{ln2}$$

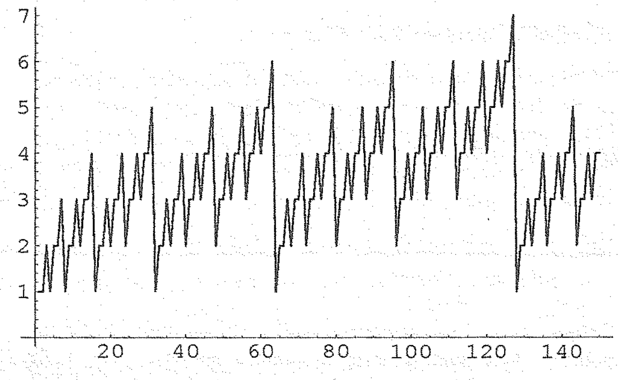
'dir.

Bu arada, Mondelbrot'un şu sözlerine kulak verelim:

"Ben bu oyuna dahil olduğumda sezginin tamamen eksik olduğunu farkettim. Sezginin sıfırdan başlayıp yaratılması gerekiyordu. Alışılagelmiş araçlarla - el, cetvel ve kalem gibi - eğitimi yapılan sezgi, bu şekillerin canavarca bir görünüme ve patolojik niteliğe sahip olduğunu keşfetmiştir. Eski sezgi insanı tamamen yanlış yola götürmekteydi."

Yazımızı tamamlamadan önce, fraktallere duyduğumuz heyecanımıza yenilerek, *Matehematica* paket programı ile oluşturduğumuz bir fraktal daha sunmak istiyoruz. Bunun için, 10 tabanlı bir $n$ sayısının $b > 1$ tabanlı sayıtlama dizgesini düşünelim. Bilindiği gibi bu dizgenin sayakları(digit); $d_i = 0, 1, 2, \ldots, b-1$ olmak üzere, $n = (d_i)_b$ şeklinde bir gösterim kullanılır. Örneğin, 19 sayısının 2 tabanına göre açılımı, $19 = 1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ olduğundan, bu durum $19 = (10011)_2$ ile gösterilir. Şimdi bir $f$ fonksiyonunu; $n$ sayısının $b$ tabanına göre açılımındaki $d_i$ sayağının sayısı olarak tanımlayalım. Bunu da, $f[n, b, d_i]$ :="$n = (d_i)_b$ gösterimindeki $d_i$ sayağının sayısı" olarak formülize edelim. Örnek vermek gerekirse, $f[19, 2, 0] = 2$ ve $f[19, 2, 1] = 3$ olacaktır. Tanımlamış olduğumuz bu $f$ fonksiyonu, **Sayak Sayma Fonksiyonu** olarak isimlendirilmiş olup, *Mathematica*'da, $n$ verilen bir sayı, $b$ taban ve $d$ sayak olmak üzere **DigitCount[n, b, d]** komutu ile işletilmektedir. Artık aşağıdaki komutu işletmek için hazırız demektir. Kendine-benzerlik özelliğine sahip bir fraktal elde ettiğimize dikkat edelim:

In[1]:= **ListPlot[Table[DigitCount[n, 2, 1], {n,150}], PlotJoined - > True]**




Out[1]:= -Graphics-

Sonuç olarak, bugün birçok bilim dalında, fraktal, kırıklı, kesikli ve parçalı şekilleri, kar tanelerinin eğrilerinden galaksilerin kesintili tozlarına kadar düşünebileceğiniz bütün şekilleri tanımlamak, hesapla mak ve düşünmek için kullanılan bir araç durumuna gelmiştir.

**Alıştırmalar:**

(1) Modern Kümeler Teorisinin babası olarak anılan George Cantor (1845-1918)'un adıyla anılan bir Cantor kümesi oluşturalım: [0,1] kapalı aralığını üç eşit parçaya bölüp, ortadaki $(1/3, 2/3)$ açık aralığını atalım. Geriye kalan $[0, 1/3]$ ve $[2/3, 1]$ aralıklarını da ayrı ayrı üçe bölüp, ortadaki açık aralıkları atalım. Geriye, $[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]$ aralıkları kalacaktır. Aynı işlemi tekrarlı olarak sonsuza kadar devam ettirdiğimizi varsayarak, sonuçta elde ettiğimiz fraktalin boyutunu bulunuz. Ayrıca, $L_n$, $n$-inci adımda elde edilen aralıkların toplam uzunluğunu göstermek üzere, $n \to \infty$ için $L_n$ nin limitini bulunuz.

(2) Sierpinski (1882-1969) halısı şu şekilde elde edilir: Düzlemde kenar uzunluğu 1 birim olan karesel bir $S$ bölgesini göz önüne alalım. Bu bölgeyi, eşit alanlı, 9 tane karesel altbölgelere ayırıp, ortadaki bölgenin içini(sınırları kalacak) atalım. Aynı işlemi, kalan (8 tane) altkarelere uygulayarak, geriye (64 tane) küçük karelerden oluşan bir bölge edelim. Bu süreci, herbir alkareye uygulayarak, sonsuza kadar devam ettirdiğimizi düşünürsek, sonuçta bir $S^*$ fraktalı (Sierpinski halısı) elde ederiz. $S^*$ in fraktal boyutunu bulunuz. Ayrıca, $S_n$, $n$-inci adımda elde edilen bölgenin toplam alanını göstermek üzere, $n \to \infty$ için $S_n$ nin limitinin sıfır olduğunu gösteriniz (Sierpinski halısı pozitif alana sahip olamaz!).

**KAYNAKÇA :**

[1] F. Bornsiey : Fractals Everywhere, 1993

[2] Mathematica 4: Wolfram Research, 1988-1999