PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla-İzmir adresine 31 Aralık 2001 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.241. $a^2+2cd+b^2$ ve $c^2+2ab+d^2$ sayıları, tam sayıların kareleri olacak şekilde birbirinden farklı a,b,c,d pozitif tamsayıları bulunuz.

A.242. Kareli kağıt üzerinde, köşeleri karelerin köşelerinde bulunan ve iki kenarortayı birbirine dik olan bir üçgen çiziniz.

A.243. Doğru üzerinde bir kaç nokta alındı. Sonra her iki komşu nokta arasında bir nokta daha alındı. Bu işlem iki kez daha yapıldı (toplam üç kez). Sonuçta doğru üzerinde 113 nokta olduğuna göre başlangıçta kaç nokta alınmıştır?

A.244. Kesrin payı ve paydası, toplamları 101 olan pozitif tam sayılardır. Kesrin $\frac{1}{3}$' ten büyük olmadığı biliniyor. Bu kesir en fazla kaç olabilir?

A.245. $p_1p_2 = 2(q_1+q_2)$ ise , $x^2+p_1x+q_1=0$ ve $x^2+p_2x+q_2=0$ denklemlerinden hiç değilse birinin reel kökünün bulunduğunu gösteriniz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.241. a,b,c pozitif tam sayıları için

$$a\cdot b+b\cdot c=c\cdot a$$

eşitliği sağlanır. O halde

$$OKEK(a,b)=OKEK(b,c)=OKEK(c,a)$$

olduğunu gösteriniz.

Y.242. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde AC ve BD köşegenleri birbirine diktir, AB ve CD kenarları da paralel değildir. AB ve CD kenarlarının orta dikmeleri, $ABCD$ dörtgeninin içerisindeki bir P noktasında kesişmektedir. $ABCD$ ' nin bir kirişler dörtgeni olması için ABP ve CDP üçgenlerinin alanlarının eşit olmasının gerek ve yeterli olduğunu gösteriniz.

Y.243. İki kişi şöyle bir oyun oynuyorlar: 1. kişi soldan sağa doğru A ve B harflerinden istediğini yazıyor (her hamlede bir harf). İkinci de her hamlesinde ya herhangi iki harfin yerini değiştiriyor, yada hiç bir şey yapmıyor. İkinci kişi 2001 'er hamleden sonra elde edilen kelimenin soldan sağa ve sağan sola okunduğunda aynı olmasını sağlayabilir mi?

Y.244. Pozitif tam sayılar kümesinde tanımlı olan $f(n)$ fonksiyonu

$$f(f(n))+f(n)=\begin{cases}2n-1, & n \text{ çift ise}\\ 2n+1, & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

koşulunu sağlıyorsa , $f(2001)$ değerini bulunuz.

Y.245. İki yaya sabah aynı anda , biri A 'dan B 'ye , diğeri B 'den A 'ya sabit hızla yola çıktı. Öğle saatinde (saat 12 : 00'de) bunlar karşılaştılar ve yollarına devam ettiler 1. yaya akşam saat 4 : 00'da B 'ye , 2. yaya akşam saat 9 : 00'da A 'ya ulaştı. Yayalar sabah saat kaçta yola çıktılar?

ÇÖZÜMLER

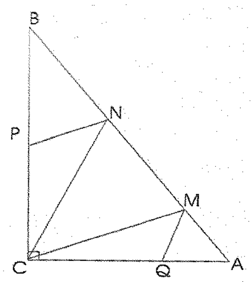
A.231. 1'den bir $n>1$ pozitif tam sayısına kadar olan sayıların art arda yazılmasından elde edilen sayıya "seri" diyelim (örneğin, 1234, 12345678910111213 v.s.). İki serinin çarpımının seri olamayacağını ispatlayınız.

Çözüm. Bir seri n basamaklı ise, $12\cdot 10^{n-2}$ ile $13\cdot 10^{n-2}$ sayıları arasındadır. O halde iki serinin çarpımı $144\cdot 10^m$ ve $169\cdot 10^m$ şeklinde olan iki sayı arasında bulunacak. Dolayısıyla çarpımın soldan ikinci basamağı 4, 5 veya 6 olabilir, böyle bir sayı da seri olamaz.

A.232. ABC dik üçgeninin AB hipotenüsü üzerinde, $|BM|=|BC|$ ve $|AN|=|AC|$ olacak şekilde, M ve N noktaları alınmıştır. Sonra $|BP|=|BN|$ ve $|AQ|=|AM|$ olacak şekilde, BC

ve AC kenarları üzerinde sırasıyla P ve Q noktaları alındılar. C, Q, M, N, P noktalarının aynı çember üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. BPN ve BCM ikizkenar üçgenleri



Şekil 1

benzer olduğundan $|PN| = |CM|$'dir. $|PC| = |NM|$ olduğundan $CMNP$, bir ikizkenar yamuktur ve dolayısıyla bir kirişler dörtgenidir, yani C,M,N,P noktalarını içeren bir çember bulunur. Benzer şekilde $CNMQ$ de bir ikizkenar yamuktur ve C,N,M,Q noktaları bir çember üzerinde bulunur. Bu çemberlerin ikisi de C,N,M noktalarını içerdiğinden, çakışırlar. Böylece C,Q,M,N,P noktaları bir çember üzerinde bulunacaktır.

A.233. $a_1, a_2, ..., a_{200}$ sayılarından bir kısmı mavi kalemle, geriye kalanları kırmızı kalemle yazılmıştır. Kırmızı sayıları silersek, geriye 1'den 100'e kadar olan tüm tam sayılar (artan sırayla) kalacak. Mavi sayıları silersek, geriye 100'den 1'e kadar tüm tam sayılar (azalan sırayla) kalacak. $a_1, a_2, ..., a_{100}$ sayıları arasında 12'den 100'e kadar olan tüm tam sayıların bulunduğunu ispat ediniz.

Çözüm. $a_1, a_2, ..., a_{100}$ sayılarından k tanesi mavi, $100 - k$ tanesi de kırmızı olsun . Kırmızı sayıları sildiğimizde geriye 1 'den 100'e kadar olan tüm (mavi) sayılar artan sırayla kaldığından, $a_1, a_2, ..., a_{100}$ sayıları arasında yer alan k tane mavi sayı $1, 2, ..., k$ sayıları olacak. Aynı şekilde ilk 100 sayı arasından yer alan $100-k$ tane kırmızı sayı $100, 99, ..., k+1$ sayıları olacak. Böylece ilk 100 sayı 1, 2, ...100 sayılarından oluşacak.

A.234. Her n pozitif tam sayısı için

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + ... + \{\sqrt{n^2}\} \leq \frac{n^2-1}{2}$$

olduğunu gösteriniz (Burada $\{x\} = x - [|x|]$, x sayısının kesir değerini göstermektedir).

Çözüm. $n = 1$ için eşitsizlik $0 = 0$ eşitliğine dönüşür. $n > 1$ olsun. Her m pozitif tam sayısı ve pozitif x sayısı için $\sqrt{m^2 + x} \leq m + \frac{x}{2 \cdot m}$ eşitliğinin doğru olduğu kolayca kontrol edilir , dolayısıyla $0 \leq a \leq m$ olmak üzere her a tam sayısı için

•

$$\sqrt{m^2+a} + \sqrt{m^2+2m-a} \leq 2m+1$$

eşitsizliği geçekleşir.

•

$$[\sqrt{m^2+a}] = [\sqrt{m^2+2m-a}] = m$$

olduğundan buradan

•

$$\{\sqrt{m^2+a}\} + \{\sqrt{m^2+2m-a}\} \leq 1$$

eşitsizliğini elde edriz. $a = m$ özel durumunda ise

$$\{\sqrt{m^2+m}\} \leq \frac{1}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla her m pozitif tam sayısı için

$$\sum_{k=m^2}^{m^2+2m} \{\sqrt{k}\} = \sum_{a=0}^{2m} \{\sqrt{m^2+a}\}$$

$$= \sum_{a=0}^{m-1} \{\sqrt{m^2+a}\} + \sum_{a=0}^{m-1} \{m^2+2m-a\} + \{\sqrt{m^2+r}$$

$$\leq \sum_{a=0}^{m-1} (\{\sqrt{m^2+a}\} + \{m^2+2m-a\}) + \frac{1}{2}$$

$$\leq \frac{2m+1}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz.$\{\sqrt{n^2}\} = 0$ eşitliğini de göz önünde bulundurursak,

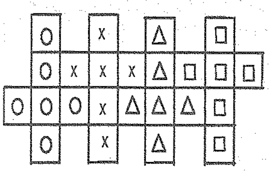
$$\sum_{t=1}^{n^2} \{\sqrt{t}\} = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=m^2}^{m^2+2m} \{\sqrt{k}\} + \{\sqrt{n^2}\}$$

$$\leq \sum_{m-1}^{n-1} \frac{2m+1}{2} = \frac{n^2-1}{2}$$

olarak bulunur.

A.235. 2x2x2 boyutlu kübü dört tane 1x1x1 boyutlu kübün açılımı ile kapatmak mümkün müdür?

Çözüm. Şekil 2'deki 4 tane 1x1x1 boyutlu küple



Şekil 2

kapatılmış olan çokgen kolayca bir 2x2x2 boyutlu küpe dönüştürülebilir.

Y.231. Her $n > 2$ tam sayısı için

$$a_n = 2^{2^n-1} - 2^n - 1$$

sayısının bileşik olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $b_n = 2a_n = 2^{2^n} - 2^{n+1} - 2$ sayısının 1'den ve a_n'den farklı bir tek sayıya bölündüğünü göstermemiz yeterlidir. n çiftse ($n = 2t$),

$$b_n = 4^{2^n-1} - 2\cdot 4^t - 2 = 1 - 2 - 2 \equiv 0 \pmod 3$$

olduğundan b_n bileşiktir. n tek sayı olsun. O halde $n = 2^k(2m-1) - 1$ olacak şekilde k ve m pozitif tam sayıları bulunur. $(2^{2^k}+1)|b_n$ olduğunu gösterelim. $2^k|2^{2^k(2m-1)-2}$ olduğundan

$$(2^{2^k}+1)|(2^{2^k(2m-1)}+1) = 2^{n+1}+1$$

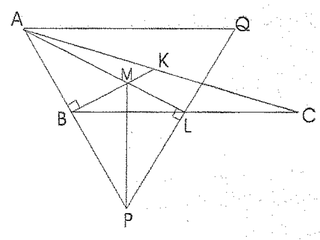
elde edilir. Ayrıca, $n > 2$ olduğundan $k = m = 1$ olamaz, dolayısıyla $k \le 2^k(2m-1) - 2$ eşitsizliği sağlanır. O halde $2^k|[2^k(2m-1)]$ ve buradan da

$$(2^{2^k}+1)|(2^{2^{2^k(2m-1)-2}}+1) = 2^{2^n-1}+1$$

elde edilir. Şimdi $b_n = 2^{2^n} - 1 - (2^{n+1}+1) = (2^{2^{n-1}}-1)(2^{2^{n-1}}+1) - (2^{n+1}+1)$ eşitliğinden $(2^{2^k}+1)|b_n$, buradan da a_n'in bileşik olduğu elde edilir ($2^{2^k}+1 < a_n$ olduğu kolayca kontrol edilir).

Y.232. İkizkenar olmayan ABC üçgeninde AK ve BL kenarortaylardır. $\widehat{BAK} = \widehat{CBL} = 30°$ ise, ABC üçgeninin iç açılarının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm.



Şekil 3

P noktası AB doğrusu üzerinde olmak üzere bir kenarortayı AK olan APQ eşkenar üçgeni çizelim (Şekil 3). $|AM| : |MK| = 2 : 1$ olduğundan, M noktası APQ üçgeninde ağırlık merkezidir. O halde $s(\widehat{KPM}) = 30° = s(\widehat{KBM})$, dolayısıyla $KMBP$ bir kirişler dörtgenidir. $s(\widehat{MKP}) = 90°$ olduğundan, $s(\widehat{MBP}) = 90°$ olacak, dolayısıyla $|AB| = |BP|$'dir. $|AB| = a$ olsun. AKP dik üçgeninden $|BK| = |AB| = a$ ve buradan da $|BC| = 2a$'dır. $\cos(\widehat{ABC}) = \cos 120° = -\frac{1}{2}$'dir. Kosinüs teoremininden $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos(\widehat{ABC}) = a^2 + 4a^2 - 2a\cdot 2a\cdot(\frac{-1}{2}) = 7a^2$'dir. Yine kosinüs teoreminden $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{a^2+7a^2-4a^2}{2\cdot a\cdot\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ ve $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{7a^2+4a^2-a^2}{2\cdot a\sqrt{7}\cdot 2a} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$ elde ederiz.

Y.233. Bir ülkede N tane havayolu şirketi var ve her kentten tüm şirketlerin birer uçuşu bulunur. Herhangi iki kentten birinden diğerine uçakla gitmek mümkündür (doğrudan veya birkaç uçak değiştirerek). Ekonomik krizden dolayı $N-1$ tane uçuş iptal edildi, fakat hiçbir şirketin birden fazla uçuşu iptal edilmedi. Yine de herhangi kentten diğerine uçakla ulaşmanın mümkün olduğunu gösteriniz.

Çözüm. A ve B kentleri arasında bir X şirketinin uçuşu iptal edilmişse, A'dan B'ye başka bir yolla ulaşılabileceğini göstermemiz yeterlidir. Koşullardan $N-1$ şirketin birer uçuşunun iptal edildiği, bir Y şirketinin de hiçbir uçuşunun iptal edilmediği anlaşılır. Y şirketinin A kentinden bir A_1 kentine uçuşu bulunur. $A_1 = B$ ise A'dan B'ye bu uçuşla ulaşırız. $A_1 \neq B$ ise, A_1'den X şirketinin bir A_2 kentine uçuşu bulunur, çünkü X şirketinin sadece bir uçuşu iptal edilmişti. A_2 kenti A ve B kentlerinden farklıdır, çünkü X şirketinin her kentten sadece bir uçuşu bulunur. Şimdi Y şirketinin A_2 kentinden bir A_3 kentine uçuşu bulunur. A_3 kenti A ve A_1'den farklıdır, çünkü her kentten Y şirketinin sadece bir uçuşu bulunur. Böyle devam ederek $A_i \neq B$ olduğu sürece, $A_4, A_5, \ldots$ kentlerine ulaşabiliriz. Kent sayısı sonlu olduğundan bir n için $A_n = B$ elde edeceğiz. Böylece sırayla X ve Y şirketlerinin uçuşlarını kullanarak A'dan B'ye ulaşacağız (Y şirketi ile başlayıp, Y ile bitirecegimiz açıktır).

Y.234. Aşağıdaki koşulları gerçekleyen tüm $f: R \to R$ sürekli fonksiyonları bulunuz.

a-) Her $x \in R$ için $f(x) = x + f(x - f(x))$

b-) $f(0) = 0$

Çözüm. $g(x) = x - f(x)$ fonksiyonu için koşuldan $-g(x) = f(g(x))$ eşitliğini elde ederiz. Ohalde $g(x)$ süreklidir; $g(0) = 0$'dır ve her x için $g(g(x)) = g(x) - f(g(x)) = 2.g(x)$ eşitliği sağlanır. dolayısıyla $g(x)$' in bir pozitif değeri bulunursa , g yi bir kaç kez uygulayarak $g(x)$'in istediğimiz kadar büyük değerini elde ederiz. $g(x)$ sürekli olduğundan , bu durumda $g(x)$ 'in negatif olmayan tüm değerleri aldığını görürüz. Benzer şekilde, $g(x)$'in herhangi negatif değeri varsa, tüm negatif değerleri alacak. Böylece aşağıdaki 4 durum olabilir:

1. Her x için $g(x) = 0$'dır. Bu durumda $f(x) = x$'dir.

2. $g(x)$ tüm negatif olmayan değerleri ve sadece bunları alıyor. Her $x \geq 0$ sayısı $x = g(y)$ şeklinde yazılabildiğinden $f(x) = f(g(y)) = -g(y) = -x$ olacak. $x < 0$ için $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x$. Bu iki koşulu sağlayan tüm $f(x)$ sürekli fonksiyonlarının bir çözüm olduğunu gösterelim. $x \geq 0$ ise, $f(x - f(x)) + x - f(x) = f(2x) + x + x = 0$. $x < 0$ ise, $f(x - f(x)) + x - f(x) = f(x) - x + x - f(x) = 0$ olacak çünkü $x - f(x) \geq 0$'dır.

3. $g(x)$ pozitif olmayan tüm değerleri ve sadece bunları alıyor. 2. duruma benzer şekilde $x \leq 0$ için $f(x) = -x$ ve $x > 0$ için $f(x) \geq x$ koşullarını sağlayan fonksiyonların ve sadece bunların olduğunu elde ederiz.

4. $g(x)$ tüm reel değerleri alıyor. Bu durumda her $x \in R$ sayısı $x = g(x)$ şeklinde yazılabilir, dolayısıyla $f(x) = f(g(y)) = -g(y) = -x$ elde edilir.

Y.235. Pozitif tam sayılar kümesi birbiriyle kesişmeyen iki sonsuz kümeye ayrılmıştır. Her iki kümede toplamları birbirine eşit olan 100'er sayı bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. Kümeler A ve B olsun: $N = A \bigcup B$. Kümeler sonsuz olduğundan, $n \in A$ ve $n+1 \in B$ olacak şekilde sonsuz sayıda $(n, n+1)$ çifti bulunur. Aynı şekilde $m \in B$ ve $m+1 \in A$ olacak şekilde sonsuz sayıda $(m, m+1)$ çifti bulunur. Alacağımız tüm 200 sayı birbirinden farklı olacak şekilde 50 tane birinci tür çift ve 50 tane de ikinci tür çift alabiliriz. Böylece A ve B kümelerinde 100'er tane sayı almış olacağız ve bunların toplamlarının eşit olduğu açıktır.

KİTAP TANITIMI

Herkes İçin Matematik
(John Allen Paulos)
Çeviri: Beyaz Yayınları

Yetersiz matematik eğitimi, matematikle ilgili psikolojik engeller ve hayal, algılar insanların çoğunu sayı cahili yapmaktadır. Eğer reklamcıların yanlış iddialarına, şarlatan doktorlara ve sahte bilimadamlarına direnecek-sek, içimizde istatistik konusunda sağlıklı bir kuşkuculuk geliştirmeliyiz. Bu canlı ve esprili kitabında John Allen Paulos matematiğin gücünü gösteren birçok ilginç örneği biraraya getiriyor. Birçok insan sayıların matematikçilerin uğraşı alanına girdiği kanısındadır. Oysa günlük yaşamında matematiği kullanan her insan, bunun yararını görecektir. Borsa stratejileri, eş seçimi, fal, diyet ve tıbbi iddialar, terörizm riski, astroloji, spor rekorları, seçimler, cins ayrımcılığı, UFO'lar, parapsikoloji, piyangolar ve ilaç testleri gibi güncel konulara matematik açıdan bakmak onları algılayışımızı değiştirecektir. *Herkes İçin Matematik*'i okumak matematik ve sayılardan hoşlanmayanlar için olduğu kadar matematik meraklıları için de ufuk açıcı olacaktır.

Büyük Çekişmeler
(Hal Hellman)
Çeviri: Füsun Baytok, TÜBİTAK

Bilimsel buluş süreci duygularla doludur. Bilim adamı yeni bir düşünce ortaya attığında çoğu kez başkalarının kuramlarını çiğnemiş olacaktır. Eski fikirlerin sahipleri ise kolay kolay pes etmeyecektir. Bilim adamları arasında bu tür anlaşmazlıklar olmuştur. Bu anlaşmazlıklar bilim için yararlıdır. Tıpkı büyüklerin kavgaları ile küçüklerin gürültülerinin düşünce özgürlüğü ve eğitimin gelişmesi için zorunlu olması gibi. Kıskançlık, çekememezlik, rekabet, hırs, bilim adamları arasında da görülür. Kitap, bu konuda bilim tarihinden seçilmiş on tartışmayı okura sunmayı amaçlamaktadır.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Dergimize gönderilen makalelerin yayınlanıp yayınlanamayacağına Yayın Kurulu karar verir, yayınlanan makalelerde sunulan görüşler tamamen yazar(lar)a aittir. Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla, İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.
