# BİKOMPLEKS SAYILARLA TANIŞMAK İSTER MİSİNİZ?

**Nurhayat İspir**
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Beşevler-ANKARA

---

Kompleks sayıların esrarlı varlığı sizi daima etkilemişse bikompleks sayılarda aynı gizemle yaşamınızda bir yer edinecektir. Ben karmaşık sayı yerine literatürde yaygın olan kompleks sayı terimini kullanmayı tercih ediyorum. Çünkü kompleks sayılara karmaşık sayı denmesi başlangıçta pek sevimli gözükmemekte kişi kendini karmakarışık bir sayılar sistemi içinde matematik yapacağı korkusu ile karşı karşıya bulmaktadır. Oysa spor kompleksi veya alış-veriş kompleksi gibi dilimize giren terimler düşünülürse örneğin hiçbir zaman spor karmaşığı biçiminde bir ifade söz konusu değildir. Nasıl ki spor kompleksinden algıladığımız şey belli spor birimlerinin bir arada bulunması ise kompleks sayıda iki reel sayının belli bir kural altında ki birlikteliğidir. Belkide karma sayı, bileşik sayı terimleri kompleks sayıları belirtmek için daha uygundur. İki reel sayıyı o muhteşem $i$ sayısı ile birbirine sarılmış dans eden bir çift gibi düşünün. Bazen bu yavaş, yavaş yapılan tatlı romantik bir danstır ki o sırada problemler kompleks sayılarla hoş bir zariflikle çözümlenir bazen çigan müziğinin hırçın, bazen de bir tangonun meydan okuyan figürleri olur ve en zor problemler mükemmel bir sonla noktalanır. Neyse bizim bu makaledeki amacımız daha farklı, size yeni bir çifti yani bikompleks sayıları tanıtmak istiyorum.

Tarihi 1800'lü yıllara dayanan bikompleks sayılar ilk olarak 1892'de Corrada Serge tarafından tanımlanmıştır. Bikompleks sayılar kuaterniyonlar cebirinin altcebirlerinden birinin elemanları olup, Serge, bikompleks sayıları hatta trikompleks, ..., $n$-kompleks sayıları tanımladı. Bikompleks sayılar uzayının 4-boyutlu Euclid uzayına gömülebilir olduğunu gösterdi. Bikompleks idempotent elemanları ve bikompleks sayıların idempotent gösterimini elde etti.

1894'de Scheffers tek kompleks değişkenli fonksiyonların bikompleks fonksiyonlara bir genelleştirmesini verdi. Bikompleks sayılarla ilgili gelişmelerin en çok kayedildiği yıllar 1928- 1940 yıllarıdır. Özellikle 1933'de yazdığı makalede, Ringleb'in bikompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonlar arasındaki bağıntıyı vermesi ile bu konudaki çalışmalar hız kazanmıştır. Günümüzde, hiperkompleks sayılar ya da kuaterniyonlar teorisi alanlarında bu sayılarla yapılan çalışmalara rastlamaktadır.

Burada bikompleks sayı kavramını tanıtarak bikompleks sayılar kümesinin özelliklerinden bahsedip, çok kısa olarak da bikompleks değişkenli fonksiyonlara değineceğiz. Daha fazla bilgi ve ayrıntılar içinse metnin sonundaki kaynağı öneriyorum.

Burada reel sayıları $C_0$ ile kompleks sayılar kümesini $C_1$ile bikompleks sayılar uzayınıda $C_2$ ile gösteriyoruz. Kompleks sayılar uzayının bir genelleştirmesi olan bikompleks sayılar uzayı

$$z_1 + i_2 z_2, \quad i_2^2 = -1, \quad z_1, z_2 \in C_1 \tag{1}$$

biçimindeki elemanlardan oluşur. Buradaki kompleks sayılar

$$z_1 = x_1 + i_1 x_2, \quad z_2 = x_3 + i_1 x_4, \quad i_1^2 = -1, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in C_0$$

biçiminde olduğundan bikompleks sayılar uzayında bir eleman $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C_0$ olmak üzere

$$x_1 + i_1 x_2 + i_2 x_3 + i_1 i_2 x_4, \quad i_1^2 = -1, \quad i_2^2 = -1, \quad i_1 i_2 = i_2 i_1 \tag{2}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan açık olarak $C_2$, $C_0^4$ uzayına gömülebilir (embedding) olduğu ve (1) ifadesinden dolayı da $C_2$ nin $C_1^2$ ye gömülebilir olduğu görülür. Ayrıca $C_0$, $C_1$ in bir alt uzayı $C_1$ de $C_2$ nin bir alt uzayıdır.

(2) gösterimi göz önüne alınırsa, $C_2$ de iki elemanın eşitliği, toplamı ve bir elemanın reel bir skalerle çarpımı $C_0^4$ de olduğu gibi tanımlanır. Böylece $C_2$ bir *lineer uzaydır.* Yine $C_2$ de bir $z_1 + i_2z_2$ *elemanının normu*

$$\|z_1 + i_2z_2\| = \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)^{1/2} = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2}$$

olup bu norm tanımı ile $C_2$ bir *normlu lineer uzaydır.* $C_0^4$ uzayının tam uzay olduğu bilinmektedir. $C_2$, $C_0^4$ e gömülebilir olduğundan ve $C_2$ deki norm $C_0^4$ deki normla aynı olduğu için $C_2$ normlu lineer uzayı da *tamdır.* Sonuç olarak $C_2$ bir *Banach uzayıdır.* $C_2$ de iki elemanın çarpımı, $z_1, z_2, w_1, w_2 \in C_1$ ve $i_2^2 = -1$ olmak üzere

$$(z_1 + i_2z_2)(w_1 + i_2w_2) = (z_1w_1 - zw_2) + i_2(z_1w_2 + z_2w_1)$$

olarak tanımlanır ve $C_2$ nin bir *cebir* olduğu kolayca görülebilir. Hatta normun

$$\|z(z_1 + i_2z_2)\| = |z|\,\|z_1 + i_2z_2\|\,, \quad z \in C_1, \; z_1 + i_2z_2 \in C_2$$

ve

$$\|(z_1 + i_2z_2)(w_1 + i_2w_2)\| \le \sqrt{2}\,\|z_1 + i_2z_2\|\;\|w_1 + i_2w_2\|$$

özelliklerinden dolayı $C_2$ nin bir *Banach cebiri* olduğunu gösterebiliriz.

$C_2$ de $z_1 - i_2z_2$ sayısına $z_1 + i_2z_2$ bikompleks sayısının $i_2-$*eşleniği* denir. Açık olarak $(z_1 + i_2z_2)(z_1 - i_2z_2)$ çarpımı bir kompleks sayıdır. Ayrıca $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, sırası ile, $z_1$ ve $z_2$ nin $C_1$ deki eşleniklerini göstermek üzere $z_1 + i_2z_2$ bikompleks sayısının $i_1i_2-$ *eşleniği* $\overline{z_1} - i_2\overline{z_2}$ biçiminde tanımlanır.

Şimdi $C_2$ de tanımlayacağımız yeni bir gösterimle hem $C_2$ de kümelerin bazı özelliklerini hemde fonksiyonlara ilişkin kavramları daha kolay ifade edebileceğiz. Karesi kendisine eşit olan elemanlara idempotent eleman denildiğini biliyoruz. $C_2$ de tam dört tane idempotent eleman vardır. Bunlar,

$$0,\; 1,\; \frac{1 + i_1i_2}{2},\; \frac{1 - i_1i_2}{2}$$

elemanlarıdır. $C_2$ deki her $z_1 + i_2z_2$ elemanı

$$z_1 + i_2z_2 = (z_1 - i_1z_2)\left(\frac{1 + i_1i_2}{2}\right) + (z_1 + i_1z_2)\left(\frac{1 - i_1i_2}{2}\right) \tag{3}$$

olarak bir tek biçimde yazılabilir. $z_1 + i_2z_2$ bikompleks sayısının (3) gösterimine $z_1 + i_2z_2$ bikompleks sayısının *idempotent gösterimi* denir. Burada kolaylık sağlaması bakımından

$$\left(\frac{1 + i_1i_2}{2}\right) = e_1, \quad \left(\frac{1 - i_1i_2}{2}\right) = e_2$$

gösterimlerini kullanıyoruz. Buna göre (3) eşitliği

$$z_1 + i_2z_2 = (z_1 - i_1z_2)e_1 + (z_1 + i_1z_2)e_2$$

olarak yazılır ve $z_1 - i_1z_2$, $z_1 + i_1z_2$ elemanlarına $z_1 + i_2z_2$ nin *idempotent bileşenleri* **denir. Burada** $e_1$ ve $e_2$ idempotent elemanları $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1e_2 = 0$ özelliklerine sahiptir.

Şimdi bikompleks uzayda açık küme, irtibatlı küme kartezyen çarpım kümesi ve disk kavramlarını tanımlamak istiyoruz. $A_1$ ve $A_2$ kompleks uzaylarını

$$A_1 = \{z_1 - i_1 z_2 : z_1,\, z_2 \in C_1\}$$

ve

$$A_2 = \{z_1 + i_1 z_2 : z_1,\, z_2 \in C_1\}$$

olarak tanımlayalım. $C_1$ deki her eleman $z_1 - i_1 z_2$ veya $z_1 + i_1 z_2$ biçiminde gösterilebildiğinden $A_1$ ve $A_2$ deki elemanlar $C_1$deki elemanlarla aynıdır. Yani $A_1$ ve $A_2$ kümeleri $C_1$ in farklı gösterimleridir. $(z_1 - i_1 z_2)e_1 + (z_1 + i_1 z_2)e_2$ idempotent gösteriminden dolayı $C_2$ deki her $z_1 + i_2 z_2$ elemanına karşılık $A_1$ve $A_2$ de $(z_1 - i_1 z_2)$ ve $(z_1 + i_1 z_2)$ elemanları ve $A_1 \times A_2$ deki her bir $(z_1 - i_1 z_2,\ z_1 + i_1 z_2)$ elemanına karşılık da $C_2$ de bir tek nokta bulunduğu açıktır. Bu durumu dikkate alarak her $z_1 + i_2 z_2 \in C_2$ ve her $z_1 - i_1 z_2 \in C_1,\ z_1 + i_1 z_2 \in C_2$ için aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım:

$$\begin{aligned} h_1 &: C_2 \to A_1,\ h_1(z_1 + i_2 z_2) = z_1 - i_1 z_2 \\ h_2 &: C_2 \to A_2,\ h_2(z_1 + i_2 z_2) = z_1 + i_1 z_2 \end{aligned}$$

ve

$$H : A_1 \times A_2 \to C_2, H(z_1 - i_1 z_2,\ z_1 + i_1 z_2) = (z_1 - i_1 z_2)e_1 + (z_1 + i_1 z_2)e_2.$$

$X$, $C_2$ nin bir alt kümesi olsun. $h_1|_X : X \to A_1$, $h_2|_X : X \to A_2$ kısıtlama dönüşümleri $X$'i, $A_1$ve $A_2$ nin sırası ile

$$X_1 = \{w_1 \in A_1 : w_1 = h_1(z_1 + i_2 z_2),\ z_1 + i_2 z_2 \in X\}$$

ve

$$X_2 = \{w_2 \in A_2 : w_2 = h_2(z_1 + i_2 z_2),\ z_1 + i_2 z_2 \in X\}$$

altkümelerine dönüştürür. $X$ ve $X_1$, $X_2$ çifti arasındaki bağıntının anlamı bu kısıtlama dönüşümleri yardımı ile gösterilebilir. Şöyle ki;

$X$, $C_2$ de bir küme olsun ve $h_1$, $h_2$ dönüşümleri de $X$'i, sırası ile, $A_1$ in $X_1$ ve $A_2$ in $X_2$ altkümeleri içine dönüştürsün.

1. Eğer $X$, $C_2$ de bir açık küme ise bu durumda $X_1$ ve $X_2$ de $A_1$ ve $A_2$ de açık kümelerdir.
2. Eğer $X$, $C_2$ nin bir konveks kümesi ise, bu durumda $X_1$ ve $X_2$ de $A_1$ ve $A_2$ de konveks kümelerdir.
3. $X$, $C_2$ deki $a + i_2 b$ ye göre yıldızsal (starlike) ise, $X_1$ ve $X_2$,sırası ile, $a - i_1 b$ ve $a + i_1 b$ ye göre yıldızsal kümelerdir (G. B. Price, sayfa 38).
4. $X$, $C_2$ de bir irtibatlı (connected) küme ise, bu durumda $X_1$ ve $X_2$ de $A_1$ ve $A_2$ de irtibatlı kümelerdir.

Karşıt olarak, kompleks düzlemin kümelerinin özelliklerinden faydalanarak bikompleks uzayın kümeler ilişkin bazı sonuçları elde etmek için aşağıdaki tanıma gerek vardır.

$C_2$ de bir $X$ kümesine kartezyen küme denmesi için, gerek ve yeter koşul,

$$X = \{\ z_1 + i_2 z_2 \in C_2 :\ \ z_1 + i_2 z_2 = w_1 e_1 + w_2 e_2,\ \ (w_1, w_2) \in X_1 \times X_2\} \tag{4}$$

olacak biçimde $A_1$ de $X_1$ ve $A_2$ de $X_2$ kümelerinin var olmasıdır. Eğer $X$, (4) ü sağlıyorsa, bu durumda $X$'e $X_1$ ve $X_2$ ile belirlenen *kartezyen küme* denir.

Şimdi, $X$, $A_1$ deki $X_1$ ve $A_2$ deki $X_2$ ile belirlenen $C_2$ deki kartezyen küme olsun. Bu durumda

5. Eğer $X_1$ ve $X_2$ sırası ile $A_1$ve $A_2$ de açık kümeler ise, $X$ de $C_2$ de açıktır.

6. $X_1$ ve $X_2$ sırası ile $A_1$ ve $A_2$ de konveks kümeler ise, $X$ de $C_2$ de konvekstir.
7. Eğer $X_1$ ve $X_2$ sırası ile $a - i_1 b$ ve $a + i_1 b$ ye göre yıldızsal kümeler ise, $X$ de $a + i_2 b$ ye göre yıldızsal kümedir.
8. $X_1$ ve $X_2$ irtibatlı kümeler ise $X$ de irtibatlı kümedir (G.B.Price, sayfa 40).

$C_2$ de tanımlanan disk (discus) kavramı özel bir kartezyen kümedir. Şöyleki; $C_2$ de sabit bir nokta $a : (a_1 + i_1 a_2 + i_2 a_3 + i_1 i_2 a_4)$ olsun. $\alpha = a_1 + i_1 a_2$ ve $\beta = a_3 + i_1 a_4$ diyelim. Buna göre

$$a = a_1 + i_1 a_2 + i_2 a_3 + i_1 i_2 a_4 = \alpha + i_2 \beta$$

dır. $r, r_1, r_2$ pozitif reel sayılar olmak üzere $A_1$ ve $A_2$ de

$$X_1 = \{w_1 \in A_1 : |w_1 - (\alpha - i_1 \beta)| < r_1\}$$

ve

$$X_2 = \{w_1 \in A_1 : |w_2 - (\alpha + i_1 \beta)| < r_2\}$$

kümelerini gözönüne alalım. (4) de $X_1$ ve $X_2$ ile belirli $X$ kartezyen kümesine $a$ merkezli $r_1, r_2$ yarıçaplı açık disk denir ve $D(a; r_1, r_2)$ ile gösterilir. Buna göre

$$D(a; r_1, r_2) = \left\{ \begin{array}{cc} z_1 + i_2 z_2 \in C_2 : & z_1 + i_2 z_2 = w_1 e_1 + w_2 e_2, \\ |w_1 - (\alpha - i_1 \beta)| < r_1, & |w_2 - (\alpha + i_1 \beta)| < r_2 \end{array} \right\}$$

dir ( Kapalı disk tanımınında benzer biçimde yapılabileceğine dikkat edilmelidir). $D(a; r_1, r_2)$ deki herhangi iki nokta tamamen bu kümenin içinde kalan bir poligonal eğri ile birleştirilebilir. Yani $D(a; r_1, r_2)$ açık kümesi aynı zamanda irtibatlı bir kümedir. Kompleks düzlemde olduğu gibi bikompleks uzayda da açık ve irtibatlı kümelere bölge (domain) adını veriyoruz. Bölgeler, bikompleks değişkenli analitik fonksiyonların tanım kümesi olmaları açısından önem taşırlar.

Bikompleks değişkenli analitik fonksiyonlar türevlenebilme, Cauchy-Riemann anlamında analitiklik veya kuvvet serisi açılımları ile tanımlanabilir. Bunun yanı sıra bikompleks değişkenli fonksiyonların varlığını göstermek ve bunların özelliklerini geliştirmek için tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonların varlığı kullanılır.

$C_2$ de bir $X$ bölgesi üzerinde tanımlı bir $f$ fonksiyonu $z_1 + i_2 z_2 \in X$ için idempotent gösterim kullanılarak

$$f(z_1 + i_2 z_2) = f_1(z_1 - i_1 z_2)e_1 + f_2(z_1 + i_1 z_2)e_2$$

biçiminde tanımlanır. Burada $f_1$ ve $f_2$ sırası ile kompleks düzlemin $X_1$ ve $X_2$ bölgeleri üzerinde tanımlı fonksiyonlar ve $z_1 - i_1 z_2 \in X_1$, $z_1 + i_1 z_2 \in X_2$ dir. Buna göre, $X_1$ ve $X_2$ kompleks düzlemde bölgeler ve $X$ bikompleks uzayda bir küme olsun. $z_1 + i_2 z_2$ bikompleks değişkenli $f : X \to C_2$ fonksiyonunun analitik olması için gerek ve yeter koşul

$$f(z_1 + i_2 z_2) = f_1(z_1 - i_1 z_2)e_1 + f_2(z_1 + i_1 z_2)e_2$$

olacak biçimde $f_1 : X_1 \to C_1$ ve $f_2 : X_2 \to C_2$ analitik fonksiyonlarının bulunmasıdır ( G. B. Price, sayfa 89).

## KAYNAKÇA:

Price, G. B: An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions, Marcel Dekker, 1990.