VI. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI-2001 2.SEÇME SINAVI (SORULAR VE KISA ÇÖZÜMLER)

İlham Aliyev-Doğan Çoker

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

LİSE I SORULARI

1. $abcd = 1$ eşitliğini sağlayan a, b, c, d pozitif reel sayıları için

$$\frac{1+abc}{1+a} + \frac{1+bcd}{1+b} + \frac{1+cda}{1+c} + \frac{1+dab}{1+d} \geq 4$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

2. $2^{2001} + 3^{2001} = n^k \quad (n, k \in \mathbb{N})$ sağlanacak biçimde n 'nin varlığı için k sayısı 1 'e eşit olmalıdır; kanıtlayınız.

3. Bir çember 32 eş parçaya bölünmüştür. Uç noktaları çakışan herhangi 2 parçaya "komşu parçalar" diyeceğiz. Ahmet ve Betül şöyle bir oyun oynuyorlar: Önce Ahmet kendi isteğine göre seçtiği 3 parçayı boyar. Sonra Betül, boyanmamış parçalardan herhangi 3 tanesini boyar. Daha sonra Ahmet boyanmamış 3 parçayı boyar ve oyun bu şekilde devam eder. En sonda kalan boyanmamış 2 parça komşu değilse, Ahmet kazanır; komşu ise, Betül kazanır. Doğru stratejiyi uyguladığı takdirde hangi oyuncu oyunu kesinlikle kazanır?

4. Köşe noktası O olan bir açı ve bu açının ışınlarına A ve B noktalarında teğet olan bir çember verilmiştir. A noktasından $[OB$ ışınına paralel olan doğrunun bu çember ile kesiştiği noktaya C diyelim. $[OC]$ parçasının çemberle kesiştiği diğer nokta E olsun. $[AE$ ve $[OB$ ışınlarının kesişim noktasına K denirse, $|OK| = |KB|$ olduğunu gösteriniz.

5. Dikdörtgen şeklindeki karton levha makasla 2 parçaya bölünüyor. Parçalardan biri alınarak tekrar 2 parçaya bölünüyor. Sonra bu 3 parçadan biri alınarak yine 2 parçaya bölünüyor ve bu işlem bu şekilde sürdürülüyor. Belirli bir anda ortaya çıkan parçalar içinde tam 77 tane 29-genin bulunması için, makasın en az 2001 kez kullanılması gerektiğini kanıtlayınız.

LİSE I KISA ÇÖZÜMLERİ

Çözüm 1. $abc = \frac{1}{d}$, $bcd = \frac{1}{a}$, $cda = \frac{1}{b}$, $dab = \frac{1}{c}$ olduğunu verilen eşitsizliğin sol tarafında gözönüne alırsak,

$$\frac{1+abc}{1+a} + \frac{1+bcd}{1+b} + \frac{1+dac}{1+c} + \frac{1+dab}{1+d} = \frac{1+d}{d(1+a)} + \frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{1+c}{c(1+d)} \geq \dots$$

(Aritmetik Ortalama $\geq$ Geometrik Ortalama olduğundan)

$$\geq 4.\left(\frac{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}{abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}\right)^{1/4} = 4.\left(\frac{1}{abcd}\right)^{1/4} = 4$$

olur. $a = b = c = d = 1$ için eşitlik durumu elde edilir.

Çözüm 2. $2^{2001} + 3^{2001} = (2+3)(2^{2000} - 2^{1999}.3^1 + ... - 2^1.3^{1999} + 3^{2000})$.

$3^k \equiv (-2)^k \equiv (-1)^k.2^k$ $(mod\ 5)$ olduğundan,

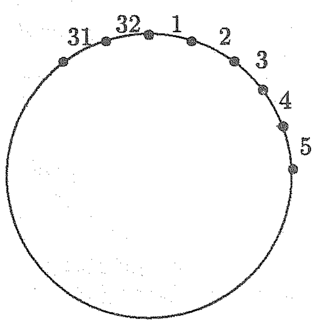
$2^{2000} - 2^{1999}.3^1 + ... + 3^{2000} \equiv 2^{2000} + 2^{2000} + ... + 2^{2000} + 2^{2000}$

$\equiv 2001.2^{2000} \equiv 1$ $(mod\ 5)$ 'tir.

Böylece, $2^{2001} + 3^{2001}$ sayısı 5 ile bölünüyor, fakat 25 ile bölünmüyor. n^k 'nın 5 ile bölünüp, 5^2 ile bölünmemesi için $k = 1$ olmalıdır.

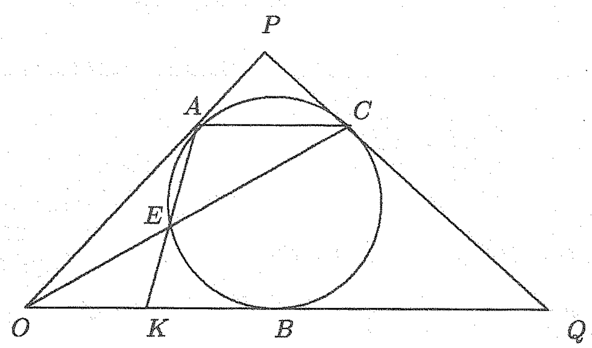
Çözüm 3. Düzgün oynarsa, oyunu Betül kazanır. Betül, örneğin, şöyle bir strateji uygulayabilir. O, parçaları 1 'den 32 'ye kadar numaralar ve aşağıdaki 16 tane ikiliyi düşünür:

$$(1,2), (3,4), ..., (29,30), (31,32)\ .$$



Eğer Ahmet 3 tane ayrı ikilinin her birinden bir parçayı boyarsa, Betül de aynı ikililerin boyanmamış parçalarını boyar ve böylece, boyanmamış ikililer sayısını $16 - 3 = 13$ 'e düşürür. Eğer Ahmet bir ikilinin her iki parçasını boyarsa, bu durumda, Betül Ahmetin ele aldığı ikinci ikilinin diğer parçasını boyar ve bundan başka, boyanmamış bir ikiliyi daha boyar. Bu takdirde yine de boyanmamış ikililer sayısı 3 azalarak 13 olur. Betül bu taktiği kullanarak ikililer sayısını 1 'e indirebilir ve böylece, en sona kalan boyanmamış parçaların komşu olmalarını sağlar.

Çözüm 4. C noktasında çembere çizilmiş teğetin $[OA$ ve $[OB$ ışınları ile kesiştiği noktalara P ve Q diyelim. $|AP| = |PC|$ olduğu için $\overset{\triangle}{APC}$ ve $\overset{\triangle}{OPQ}$ ikizkenar üçgenlerdir.

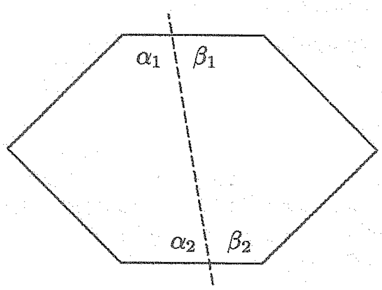


Bundan dolayı, $|AO| = |OB| = |BQ| = |QC|$ 'dir. $O\hat{A}K = A\hat{C}E = E\hat{O}K$ ve $A\hat{O}B = C\hat{Q}B$ olduğundan,

$$\overset{\triangle}{OAK} \sim \overset{\triangle}{QOC} \ \Rightarrow\ \frac{|OK|}{|OA|} = \frac{|QC|}{|QO|} = \frac{1}{2};$$

$|OA| = |OB|$ olduğundan, $\frac{|OK|}{|OB|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |OK| = |KB|$.

Çözüm 5. Dikdörtgenin iç açıları toplamı 2π 'dir. İlk kesimden sonra ortaya çıkan 2 çokgenin iç açıları toplamı en fazla $2\pi + 2\pi = 4\pi$; ikinci kesimden sonra ortaya çıkan 3 çokgenin iç açıları toplamı en fazla $4\pi + 2\pi = 6\pi$ ve böylece k. kesimden sonra ortaya çıkan $k+1$ tane çokgenin iç açıları toplamı en fazla $(k+1).2\pi$ olur. Yani, makasın her kullanılışından sonra tüm çokgenlerin iç açılarının toplamı en fazla 2π artar. Bu, aşağıdaki şekilden de anlaşılıyor:



(Bu şekile göre: "artış" $= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) = 2\pi$.)

Çokgenler içinde tam 77 tane 29-gen bulunması için gereken adım sayısı k olsun. O halde k. adımdan sonra ortaya çıkan $k+1$ tane çokgenin iç açıları toplamı, yukarıda belirtildiği gibi, en fazla $(k+1).2\pi$ olacaktır. Bu $(k+1)$ çokgenden 77 tanesi 29-gendir ve bunların iç açıları toplamı $77.27.\pi$ 'dir. Geriye kalan $k+1-77 = k-76$ tane çokgenin her biri en azından 3-gen olacağından, onların iç açıları toplamı en az $(k-76).\pi$ 'dir. Böylece,

$$(k+1)2.\pi \geq 77.27.\pi + (k-76).\pi$$

olur. Buradan

$$2k + 2 - k \geq 77.27 - 76 \Rightarrow k \geq 77.27 - 78 = 77.26 - 1 = 2001,$$

$$k \geq 2001$$

elde edilir.

NOT: Makası 2001 kez kullanarak tam 77 tane 29-gen elde edilebilir. (Siz kendiniz bunun nasıl yapılabileceğini düşününüz!)

LİSE II SORULARI

1. $abcd = 1$ eşitliğini sağlayan a, b, c, d pozitif reel sayıları için

$$x = a + b + c + d, \quad y = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad \text{ve} \quad z = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$$

denirse,

$$x + y \leq 2z$$

olduğunu kanıtlayınız.

2. Reel katsayılı $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ polinomunun 3 pozitif reel kökü (eşit veya farklı) olduğu biliniyorsa, $a + b$ toplamının alabileceği en küçük değerin 6 olduğunu kanıtlayınız.

3. Tüm köşeleri tamsayı koordinatlı noktalarda bulunan herhangi bir kirişler çokgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğunun karesi bir rasyonel sayıdır; kanıtlayınız.

4. $x^{2001} - x$ ve $x^2 - x$ tamsayı ise, x 'in de bir tamsayı olduğunu gösteriniz.

5. a ve b pozitif tamsayıları için

$$3b^2 - 2a^2 = 1$$

eşitliği sağlansın. m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, $[a\sqrt{2}, b\sqrt{3}]$ aralığında $m\sqrt{2} + n\sqrt{3}$ şeklinde hiç bir sayının bulunmadığını gösteriniz.

LİSE II KISA ÇÖZÜMLERİ

Çözüm 1. $x \leq z$ ve $y \leq z$ olduğunu göstermek yeter. Önce $x \leq z$ olduğunu görelim. Genel kuvvet ortalamaları arasındaki eşitsizliğe göre

$$\frac{a+b+c+d}{4} \leq \left(\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}\right)^{1/3} \Rightarrow z = a^3+b^3+c^3+d^3 \geq 4.\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3.$$

$4.(\frac{a+b+c+d}{4})^3 \geq a+b+c+d$ olduğunu gösterirsek iş biter. Sonuncu eşitsizlik, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq 1$ ile denktir. Bu ise, $abcd = 1$ olmasından dolayı, doğru eşitsizliktir.

Şimdi de $y \leq z$ olduğunu görelim.

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc = \frac{1}{d};$$

$$\frac{b^3+c^3+d^3}{3} \geq bcd = \frac{1}{a}; \quad \frac{a^3+c^3+d^3}{3} \geq acd = \frac{1}{b}; \quad \frac{a^3+b^3+d^3}{3} \geq abd = \frac{1}{c}$$

eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{3.(a^3+b^3+c^3+d^3)}{3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \Rightarrow z \geq y$$

olur.

Çözüm 2. r, s ve t pozitif sayıları verilen polinomun kökleri ise,

$$P(x) = (x-r)(x-s)(x-t) \text{ ve } rst = 1$$

olacaktır. Şimdi, $P(-1) = -1 - a - b - 1 = -2 - (a + b)$ ifadesinden

$$a + b = -2 - P(-1) = -2 - (-1 - r)(-1 - s)(-1 - t)$$
$$= -2 + (1 + r)(1 + s)(1 + t) \geq -2 + 2\sqrt{r}.2\sqrt{s}.2\sqrt{t} = -2 + 8\sqrt{rst} = -2 + 8 = 6, \quad a + b \geq 6 \text{ olur.}$$

$r = s = t = 1$ için $(1 + r)(1 + s)(1 + t) = 8$ olduğundan,

$$P(x) = (x - 1)(x - 1)(x - 1) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

polinomu için $a + b = 6$ olur.

Çözüm 3. Çokgenin herhangi 3 köşesini alalım: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. Burada x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 sayıları birer tamsayı olup, A, B, C köşelerinin koordinatlarıdır. Çokgenin çevrel çemberi aynı zamanda $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin çevrel çemberidir. $a = |BC|$, $b = |AC|$ ve $c = |AB|$ diyelim.

$a^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2, b^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2$ ve $c^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ sayıları birer tamsayıdır.

$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin (ve dolayısıyla, verilen çokgenin) çevrel çemberinin yarıçapına R denirse, Sinüs Teoremine göre,

$$R = \frac{a}{2.\sin B\hat{A}C}$$

olur. Öte yandan, Kosinüs Teoremine göre,

$$\cos(B\hat{A}C) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

'dır. Böylece,

$$R^2 = \frac{a^2}{4.\sin^2 B\hat{A}C} = \frac{a^2}{4.(1 - \cos^2 B\hat{A}C)} = \frac{a^2 b^2 c^2}{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$$

ve sağ taraf bir rasyonel sayıdır.

NOT: $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin koordinatlarının rasyonel sayılar olduğunu gösterirseniz, problem yine çözülür. (Analitik geometri yöntemi kullanarak, $[AB]$ ve $[BC]$ doğru parçalarının orta noktalarından geçen ve bu parçalara dik olan doğruların kesişim noktasını bulunuz ve bu noktanın "rasyonel nokta" olduğunu gösteriniz.)

Çözüm 4. $x^2 - x = n$ diyelim. $n = 0$ ise, $x = 0$ veya $x = 1$ olabilir. Yani, x bir tamsayıdır. Şimdi $n \geq 1$ olsun. Önce, $x^{2001} = ax + b$ sağlanacak biçimde $a > 1$ ve $b > 1$ tamsayılarının varlığını gösterelim. Bunun için, tümevarım yardımıyla, her $k \geq 2$ tamsayısı için $x^k = a_k x + b_k$ sağlanacak biçimde a_k, b_k pozitif tamsayılarının var olduğunu kanıtlayalım. $k = 2$ için iddia doğrudur. $k = m$ için varsayarak $m + 1$ için ispatlayalım. Varsayım gereği, $x^m = a_m x + b_m, (a_m, b_m \in \mathbb{Z})$ 'dir Bu eşitliğin her iki yanını x ile çarparsak ve $x^2 = x + n$ olduğunu gözönüne alırsak,

$$x^{m+1} = a_m x^2 + b_m x = a_m(x + n) + b_m x = (a_m + b_m)x + n a_m = a_{m+1}.x + b_{m+1},$$
$$(a_{m+1} = a_m + b_m, b_{m+1} = a_m).$$

Her $m \geq 3$ için $a_m > 1$ olacağı açıkça görülmektedir.

Şimdi $x^{2001} = ax + b$, $(a > 1)$ eşitliğinden $x^{2001} - x = (a - 1)x + b$ elde ederiz. Problemin varsayımına göre, $x^{2001} - x$ ve dolayısıyla, $(a - 1)x + b$ bir tamsayıdır. $a - 1 \neq 0$ olduğundan, x bir rasyonel sayıdır. $x = \frac{r}{s}, ((r, s) = 1)$ olsun.

$$x^2 - x = n \Rightarrow \frac{r^2}{s^2} - \frac{r}{s} = n \Rightarrow \frac{r^2}{s} = r + ns\ .$$

Sağ taraf tamsayı olduğundan, sol taraf da tamsayı olmalıdır ve dolayısıyla $s = 1$ 'dir.

Çözüm 5. Problemin iddiasının aksini varsayalım:

$$a\sqrt{2} \le m\sqrt{2} + n\sqrt{3} \le b\sqrt{3} \qquad (*)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde m ve n pozitif tamsayıları var olsun. $(*)$ 'dan $m < a$ çıkar. Zira, $m \ge a$ olursa, $0 \le (m-a)\sqrt{2} + n\sqrt{3} \le b\sqrt{3} - a\sqrt{2} < 1$ eşitsizliğinden $0 \le n\sqrt{3} \le 1$ çelişkisi elde edilir. ($b\sqrt{3} - a\sqrt{2} < 1$ olması, $3b^2 - 2a^2 = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{3}b - \sqrt{2}a)(\sqrt{3}b + \sqrt{2}a) = 1$ bağıntısının basit sonucudur.)
Öte yandan, $(*)$ 'dan $n < b$ olması çıkar. Böylece, $m < a$ ve $n < b$ olduğuna göre,

$$0 < n\sqrt{3} + (a-m)\sqrt{2} < b\sqrt{3} + a\sqrt{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliği, $(*)$ ile denk olan

$$0 \le n\sqrt{3} - (a-m)\sqrt{2} \le b\sqrt{3} - a\sqrt{2}$$

eşitsizliği ile taraf tarafa çarparsak,

$$0 \le 3n^2 - 2(a-m)^2 < 3b^2 - 2a^2 = 1$$

ve buradan da, $0 \le 3n^2 - 2(a-m)^2 < 1$ olur. Sonuncu eşitsizlikten de

$$3n^2 - 2(a-m)^2 = 0$$

elde edilir. Fakat, sonuncu eşitliği sağlayan sıfırdan farklı tamsayılar yoktur.

NOT: $3b^2 - 2a^2 = 1$ denklemini sağlayan sonsuz çoklukta (a, b) tamsayı ikilisi vardır: $(1, 1)$ bir çözümdür ve (a, b) bir çözüm ise, $(5a + 6b, 5b + 4a)$ da bir çözümdür.

MATEMATİKSEVERLER İÇİN KİTAPLAR...

MATEMATİK MASALLARI
Yazan: A. Herscovici, Çeviren: Ercüment Akad, Güncel Yayıncılık, 2001

Sayılar evreninden muhteşem öyküler...Şehrazat masal anlatmaya 1002. geceden devam ediyor. Ama bu kez aşk değil, matematik masalları anlatıyor. Bu kitap sizi sayıların harika evrenine götürecek ve dünyadaki uyumun gizemlerini bulma olanağı verecek. Sarı ırmağın büyülü kıyılarından halifeler döneminin Bağdat'ına, eski Yunan'dan Vancouver adasına yapacağınız yolculuklarda size, matematiğin sonsuz uzayında eşlik edecek olan Thse, Archibald Arcsonius, İmparator Yu ve Şehrazat ile karşılacaksı Anlaşılması zor gibi görünen, fakat bir o kadar da gerekli olan matematik mantığını biraz olsun anlamak isteyenler için...

MATEMATİĞİN GİZLİ DÜNYASI
Yazan: D. Wells, Çeviren: Selçuk Alsan, Sarmal Yayınevi, 1995

Üçgenlerin sırlarıyla başlayan Matematiğin Gizli Dünyası sizi Eski Yunan matematikçilerinden kuantum kuramına kadar uzanan bir yolculuğa çıkartıyor. Kitaptaki her bölüm, kuramsal açıklamaların yanı sıra kutular içinde konuya ilişkin sorular da içeriyor. Bunların kimisi kolay, kimisi de oldukça zor, ama hepsinin tek amacı var: sizi düşündürmek. Çözün onları ve siz de matematikçiler arasına katılın. Tabi çok sıkıştığınızda ve kimi soruların altında ezildiğinizi hissettiğinizde yanıtlara bakabilirsiniz.

(Devamı 32. sayfada)