VI. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI-2001 (SORULAR VE KISA ÇÖZÜMLER)

İlham Aliyev-Doğan Çoker

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

1996 yılından beri düzenlenmekte olan 'Antalya Matematik Olimpiyatı' nın altıncısının 1.aşaması bu yıl Nisan ayında Akdeniz Üniversitesinde yapıldı. Türkiye genelinden 166 okuldan gelen neredeyse 1100 'ü aşkın üstün yeteneğe sahip Lise I ve Lise II öğrencisinin katılmış olduğu bu olimpiyat, beklenildiği gibi, gencecik matematikseverler için bir bilgi bayramı havasında geçti.

Bu arada bizler (Jüri üyeleri ve Olimpiyat Düzenleme Komitesi), TÜBİTAK ve Antalya Matematik Olimpiyatlarında yeri doldurulamayacak hizmetleri geçmiş USTA GEOMETRİCİ, hepimizin çok sevdiği ve saydığı **Dr. Fikri Gökdal** 'ın, olimpiyata bir kaç gün kala ansızın ölümünden dolayı yaşadığımız büyük üzüntüyü Olimpiyatın bayram havasına yansıtmamaya çalıştık. 6. Olimpiyatın sevgili hocamız **Dr. Fikri Gökdal** anısına yapılmasına oybirliği ile karar vererek, kendisine olan sonsuz vefa borcumuzu az da olsa ödemeye çalıştık...

Olimpiyat Jürisi, 1. aşamanın sonuçlarını değerlendirerek Lise I ve Lise II gruplarının her birinden en başarılı 23 öğrencinin 2. aşama sınavına çağrılmalarını uygun gördü. Bundan başka, Antalya ilinden olan öğrenciler için kendi aralarında bir sıralama belirleyebilmek için, 1. aşamanın barajını aşamayan 5 Antalyalı öğrenci daha 2. aşamaya davet edildi.

Mayıs-2001 ayında Akdeniz Üniversitesinde yapılmış olan 2.aşama sınavının sorularını ve kısa yanıtlarını da bu yazının ardında bulabilirsiniz.

TEŞEKKÜRLER: Jüri olarak, 6. Antalya Matematik Olimpiyatının yapılmasındaki katkılarından dolayı,

Akdeniz Üniversitesi Rektörlüğüne,

Akdeniz Üniversitesi Sağlık, Kültür ve Spor Dairesi Başkanlığı'na,

Konyaaltı Belediyesi'ne,

Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş'a (Başkent Üniversitesi, Ankara),

Prof. Dr. Rafail Alizade'ye (İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, İzmir)

en içten teşekkürlerimizi sunarız.

SORULAR

1. $x^3+px^2+qx-2001=0$ denkleminin kökleri a, b, c ise, p^2-2q ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $a^2+b^2+c^2$ B) $(a+b+c)^2$ C) $ab+ac+bc$
D) abc E) 2001

2. Aşağıdaki denklemin tamsayılar kümesinde kaç tane çözümü vardır?

$$2^x = \frac{x+5}{4-4x}$$

A) 5 B) 2 C) 3 D) 1 E) Sonsuz çoklukta

3. $[\![x]\!]$, x 'in tam değer fonksiyonu olmak üzere, $\{x\} = x - [\![x]\!]$ olarak tanımlansın. Her x reel sayısı için,

$$x = f(x) + f(\{x\})$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonunun $x=-\frac{17}{7}$ noktasındaki değeri nedir?

A) $-\frac{31}{14}$ B) $-\frac{19}{7}$ C) -3 D) $-\frac{19}{14}$ E) $-\frac{31}{7}$

4. Aşağıdaki denklemler sisteminin çözümü olan kaç tane (x,y) reel sayı ikilisi vardır?

$$2y = 4 - x^2$$

$$2x = 4 - y^2$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) Sonsuz çoklukta

5. $ABCD$ karesinin AB kenarı üzerinde E noktası ve AD kenarı üzerinde F noktası, $\widehat{AFE}$ açısı $15°$ olacak biçimde alınmıştır. $[EF]$ ile $[AC]$ 'nin kesiştiği nokta G olmak üzere $|AG|=1$ ise, $\frac{1}{|AE|}+\frac{1}{|AF|}$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\sqrt{2}+1$
D) $(2+\sqrt{2})\sin 75°$ E) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.

$$n = 37^{73!} + 73^{41^{37}} + 69^{96!}$$

sayısının onluk sayı sistemindeki yazılımında son iki basamak aşağıdakilerden hangisidir?

A) 03 B) 69 C) 75 D) 73 E) 41

7. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ ve $x + y + z = 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{25}{z}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 75 B) 73 C) 105 D) 83 E) 81

8. 8×8 boyutlu bir kare bulmaca hazırlanacaktır. 8 siyah kare öyle yerleştirilecektir ki, soldan sağa ve yukarıdan aşağıya oluşacak en az 2 harfli sözcük sayısı olabilecek en büyük değerine kavuşsun. Bu en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) 24 B) 32 C) 30 D) 28 E) Hiçbiri

9. Kaç tane a reel sayısı için

$$|y + 100| + |y + 99| + \cdots + |y + 1| + |y|$$

$$+|y - 1| + \cdots + |y - 99| + |y - 100| = a$$

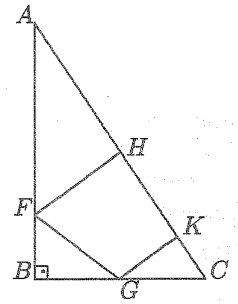
denkleminin yalnızca bir reel çözümü vardır?

A) 3 B) 1 C) 2 D) 0 E) 3 'ten çok

10. İki çocuğu olan Ahmet Bey, oğlunun bugünkü yaşında iken, kızının doğmasına 16 yıl vardı. Oğlu kızının bugünkü yaşında iken, Ahmet Bey 'in yaşı oğlunun yaşının 4 katı idi. Ahmet Bey ilk kez kaç yaşında baba olmuştur?

A) 18 B) 32 C) 24 D) 30 E) 26

11. Şekilde $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninin dik kenarları üzerinde F ve G noktaları alınarak, hipotenüse $[GK]$ ve $[FH]$ dikmeleri çizilmiştir. $|BC| = 3$, $|AB| = 4$ olduğuna göre $|HF| + |FG| + |GK|$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?



A) $\frac{25}{5}$ B) $\frac{27}{5}$ C) $\frac{23}{5}$ D) $\frac{26}{5}$ E) $\frac{24}{5}$

12. 30 farklı kitap 3 kişiye, kişilerdeki kitapların sayısı bir aritmetik dizi oluşturacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir? (Aritmetik dizinin ilk terimi sıfır da olabilir.)

A) $3.\binom{30}{10}.\binom{20}{10}$ B) $3.4^{10}.\binom{30}{10}$ C) $3.2^{10}.\binom{30}{10}$
D) $2.3^{10}.\binom{30}{10}$ E) Hiçbiri

13. $a_0 = 1$ ve her $n \geq 1$ için

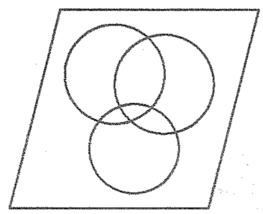
$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2 \cdot a_{n-1} + 1}$$

biçiminde tanımlanan (a_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$ dizisi için a_{11} nedir?

A) $\frac{1}{509}$ B) $\frac{1}{505}$ C) $\frac{1}{512}$ D) $\frac{1}{507}$ E) $\frac{1}{511}$

14. Yarıçapları eşit olmak zorunda olmayan 11 çember bir düzlem üzerinde öyle yerleştirilmiştir ki, herhangi iki çemberin tam iki ortak noktası vardır ve herhangi üç çemberin ortak noktası yoktur. Bu çemberler düzlemi kaç parçaya böler?

Açıklama: Aşağıdaki şekilde üç çember düzlemi 8 parçaya bölmüştür.



A) 121 B) 110 C) 99 D) 112 E) 92

15. $5^n - 1$ sayısı 2^{2001} sayısının bir katı olacak şekilde en küçük n doğal sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2^{1001} B) 2^{1999} C) 2^{2002} D) 2^{2001} E) 2^{2000}

16. x ve y reel sayıları

$$x^3 - 3xy^2 = 10 \quad \text{ve} \quad y^3 - 3yx^2 = 5$$

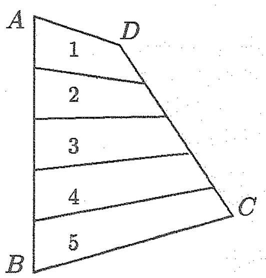
eşitliklerini sağlarsa, $x^2 + y^2$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 18 B) 10 C) 8 D) 13 E) 5

17. 60 ardışık doğal sayı içinden, toplamları 3 ile bölünebilen üç farklı sayı kaç farklı şekilde seçilebilir?

A) 11420 B) 10240 C) 11240 D) 10420 E) 12440

18. Aşağıdaki şekilde $ABCD$ konveks dörtgeninde, $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının her biri 5 eşit parçaya bölünmüş ve ortaya çıkan küçük dörtgenler numaralandırılmıştır. 1 numaralı dörtgenin alanı $12/5$ ve 5 numaralı dörtgenin alanı $46/5$ birim ise, 4 numaralı dörtgenin alanı aşağıdakilerden hangisidir?



A) 7,2 B) 6,8 C) 7,7 D) 6,4 E) 7,5

19. $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninde C noktasından hipotenüse (yani $[AB]$ kenarına) indirilen yüksekliğin hipotenüsle kesişim noktası H olmak üzere, $|AH| = 5$ ve $|BH| = 7$ birimdir. $[CH]$ yüksekliğini çap olarak kabul eden çembere A ve B noktalarında çizilen ($[AB]$ 'den farklı) teğetlerin çembere değme noktaları sırasıyla F, K ve bu teğetlerin kesişim noktası G olsun. Bu durumda $|FG|$ uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 3 D) 4 E) $3\sqrt{2}$

20. Yarıçapları 4 ve 8 olan, birbirlerine A noktasında dıştan teğet iki çember verilsin. Büyük çember üzerinde alınmış bir B noktasından, küçük çembere bir C noktasında teğet olan doğru çizilmiştir. $|AB| = \sqrt{2}$ ise, $|BC|$ nedir?

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

—o—

KISA ÇÖZÜMLER

1. Vieta Teoreminden

$$p = -(a+b+c), \quad q = ab + bc + ca$$

ve buradan da

$$p^2 - 2q = a^2 + b^2 + c^2$$

olur. YANIT A

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$2^x > 0 \Rightarrow \frac{x+5}{4-4x} > 0 \Rightarrow -5 < x < 1$$

$$\Rightarrow -4 \leq x < 0\,.$$

Deneme yolu ile $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$ 'in çözüm olduğu görülür. YANIT C

3. $x = -\frac{17}{7}$ koyarsak,

$$-\frac{17}{7} = f(-\frac{17}{7}) + f(\frac{4}{7})\;;$$

yine verilen eşitlikte $x = \frac{4}{7}$ koyarsak,

$$\frac{4}{7} = f(\frac{4}{7}) + f(\frac{4}{7}) \Rightarrow f(\frac{4}{7}) = \frac{2}{7}\,.$$

Bunu yukarıda gözönüne alırsak,

$$f(-\frac{17}{7}) = -\frac{17}{7} - \frac{2}{7} = -\frac{19}{7}.$$

YANIT B

4. Denklemleri taraf tarafa çıkarırsak,

$$(y-x)(2-(y+x))=0$$

olur. $y-x=0$ ve $y+x=2$ durumlarının her biri iki çözüm veriyor. YANIT D

5. $\widehat{AFE}=15^o$ olması koşulu kullanılmıyor.

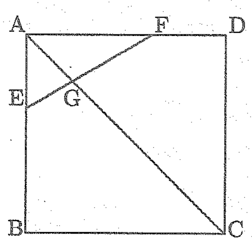
$$Alan(\overset{\triangle}{AEF}) = Alan(\overset{\triangle}{AEG}) + Alan(\overset{\triangle}{AGF})$$

'den

$$|AE|.|AF| = |AE|.|AG|.\sin 45^o + |AG|.|AF|.\sin 45^o$$

$$= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(|AE|+|AF|) \Rightarrow \tfrac{1}{|AE|} + \tfrac{1}{|AF|} = \sqrt{2}.$$

YANIT A



6. n 'nin 100 ile bölünmesinden oluşan kalanı bulmalıyız. Euler Teoremini kullanacağız: $a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (mod\ m)$; $(a,m)=1$.

$\varphi(100)=\varphi(2^2.5^2)=2.20=40$. Böylece,

$37^{73!} \equiv 1\ (100)$, $69^{96!} \equiv 1\ (100)$; $41^{37} \equiv 1\ (40)$

$\Rightarrow 41^{37} = 40.m+1 \Rightarrow 73^{41^{37}} \equiv 73\ (mod\ 100)$.
YANIT C

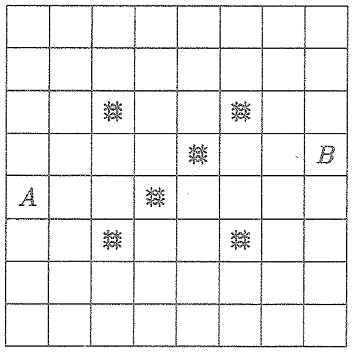
7. "Harmonik Ortalama" $\leq$ "Aritmetik Ortalama" eşitsizliğini kullanacağız:

$$\frac{9}{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{y}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}+\frac{5}{z}+\frac{5}{z}+\frac{5}{z}+\frac{5}{z}}$$

$$\leq \frac{x+y+z}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{9}{y}+\frac{25}{z} \geq 81$$

olur. Eşitlik durumu $x=\frac{1}{9}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{5}{9}$ için elde edilir. YANIT E

8. Önce merkezdeki 6 haneyi zaptediyoruz (şekle bakınız), sonra şekildeki gibi 2 haneyi (örneğin A ve B) daha boyuyoruz. YANIT C



9. Sol taraf y 'nin çift fonksiyonudur. Buna göre de y_0 çözüm ise, $-y_0$ da çözümdür. Tek çözüm olması için $y_0=-y_0 \Rightarrow y_0=0 \Rightarrow a=2.(1+2+\ldots+100)$. YANIT B

(**NOT:** $f(y)=|y+100|+\ldots+|y|+\ldots+|y-100|$ fonksiyonu $y \geq 0$ için artandır!)

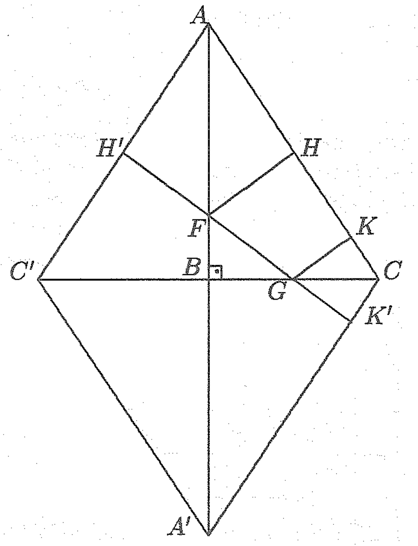
10. Baba, oğul ve kızın şu andaki yaşları, sırasıyla, x, y, z olsun. Aşağıdaki denklemler elde edilir: $x-y=z+16$ ve $x-(y-z)=4z$. Bu ikisinden $z=8$ ve $x-y=3z=24$ olur.
YANIT C

11. Üçgeni dik kenarlara göre simetrik döndürürsek, $|FH|=|FH'|$; $|GK|=|GK'|$ olur ve problem, $|H'F|+|FG|+|GK'|$ toplamının alabileceği en küçük değeri bulmaya indirgenir.

Bu minimum değer $AC'A'C$ rombüsünün yüksekliğine eşittir:

$$\frac{2.3.4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{24}{5}.$$

YANIT E



(**NOT:** Sözkonusu sayı, üçgende B 'den AC 'ye indirilen yüksekliğin iki katıdır.)

12. Kişilerden biri 10 kitap alacaktır. Bu kişiye 10 kitap $\binom{30}{10}$ sayıda yolla verilebilir. Geriye kalan 20 kitabın her birinin 2 "seçeneği" bulunduğundan, bu 20 kitap 2 kişi arasında 2^{20} yolla dağıtılabilir. Aritmetik dizinin orta terimi (10) bu kişilerden herhangi birine rastlayacağından, dağıtım sayısı $3.2^{20}.\binom{30}{10}$ olur. Bu sayıdan fazla saydığımız $2.\binom{30}{10}.\binom{20}{10}$ sayısını çıkarırsak tüm farklı dağıtım sayısını elde ederiz. YANIT E

13. I.YOL: $b_n = \frac{1}{a_n}$ dersek,

$$b_n = n^2 + b_{n-1} \Rightarrow b_n - b_{n-1} = n^2$$

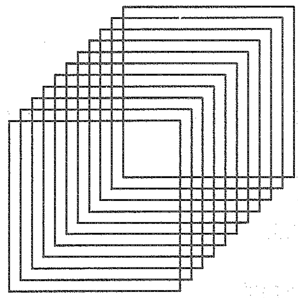
$$\Rightarrow b_n - b_0 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + b_0 \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{1}{507}.$$

II.YOL: $n = 1, 2, 3, ...$ için doğrudan hesaplayarak, a_n için bir formül bulabiliriz. YANIT D

14. I.YOL: (Euler Formülünü bilenler için) Düzlemin parçalar sayısına P, düğüm noktaları sayısına D, çemberlerin bölünmüş olduğu yaylar sayısına Y dersek, $P = Y - D + 2$ olur. $D = 2.\binom{11}{2} = 110$; $y = 2.10.11$ (çünkü 11 çemberin her biri diğer 10 çemberin her biri ile 2 ayrı noktada kesişiyor). Böylece, $P = 220 - 110 + 2 = 112$.

II.YOL: Soru, topolojik bir soru olduğundan, çemberler yerine kareler alarak doğrudan sayım yapabiliriz. YANIT D



15. $5^{2^k} - 1 = (5^{2^{k-1}} - 1)(5^{2^{k-1}} + 1)$. İkinci çarpım 2 ile bölünüyor, fakat 4 ile bölünmüyor. $5^{2^{k-1}} - 1 = (5^{2^{k-2}} - 1)(5^{2^{k-2}} + 1)$ için de aynı şey söylenebilir. Bu şekilde devam edersek, sonuçta $(5^{2^1} - 1)(5^{2^1} + 1) = 24.26$ elde ederiz ki, burada 24, 2^3 ile bölünüyor. Buradan görünüyor ki, $n = 2^{1999}$ alınırsa, $5^{2^{1999}} - 1 = (5^{2^1} - 1)(5^{2^1} + 1)(5^{2^2} + 1)(5^{2^3} + 1)...(5^{2^{1998}} + 1)$ yazılabileceğinden, sağ taraf $2^3.2^{1998} = 2^{2001}$ 'e bölünür ve 2^{2002} 'ye bölünmez. YANIT B

16. $10^2 + 5^2 = (x^3 - 3xy^2)^2 + (y^3 - 3yx^2)^2 = (x^2 + y^2)^3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$. YANIT E

NOT: *Çözümün "kısa" görünmesine bakmayınız; bu sınavın en zor sorusu bu soru olmuştur!*

17. 60 sayıyı, birbirleriyle kesişmeyen 3 sınıfa ayıralım:

3 ile tam bölünenler (bu sınıfa A diyelim);

3 ile bölününce 1 kalan verenler (B sınıfı);

3 ile bölününce 2 kalan verenler (C sınıfı).

Seçilen üç sayının üçü de aynı sınıftan olabilir: (toplam: $3.\binom{20}{3}$ seçenek).

Seçilen üç sayının biri A 'dan, biri B 'den, biri de C 'den olabilir: (toplam: $\binom{20}{1}.\binom{20}{1}.\binom{20}{1} = [\binom{20}{1}]^3$ seçenek).

Böylece, farklı seçenekler sayısı:

$3.\binom{20}{3}+[\binom{20}{1}]^3$

$=3.\frac{20!}{17!.3!}+(\frac{20!}{19!.1!})^3=11420$

YANIT A

18. Dörtgenlerin alanları bir aritmetik dizi oluşturuyor. Aritmetik dizinin dizi farkına d denirse, $9,2 = 2,4+4d$ eşitliğinden $d = 1,7$ bulunur. Böylece, 4 numaralı dörtgenin alanı $9,2-1,7=7,5$ olur. YANIT E

19. Aşağıdaki çözümden görülebileceği gibi, $|AH|$ ve $|BH|$ uzunlukları değil, sadece onların toplamları olan $|AH|+|BH|$ biliniyorsa, problem yine çözülebilir. $|AH|=y, |HB|=z$ diyelim (bizim problemde $|AH|=5, |HB|=7$ 'dir). $y+z=12$ 'dir. $|KF|=|KG|=x$ diyelim. O halde $|CH|=\sqrt{yz}$ olacaktır. Bundan başka, $\overset{\triangle}{KAB}$ üçgeninin içteğet çemberinin yarıçapının uzunluğu $\frac{1}{2}|CH|=\frac{1}{2}\sqrt{yz}$ olacaktır. $\overset{\triangle}{KAB}$ 'nin alanını 2 yolla hesaplayalım: Heron formülü $S=\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$ ve $S=u.r$ (burada $u=x+y+z$ ve $r=\frac{1}{2}\sqrt{yz}$ 'dir).

Böylece,

$$\sqrt{(x+y+z)xyz}=(x+y+z)\frac{1}{2}\sqrt{yz}$$

ve buradan da $\sqrt{x}=\frac{1}{2}(x+y+z)$; $y+z=12$ olduğundan, $x=\frac{1}{4}(x+12)\Rightarrow x=4$. YANIT D

20. BA doğrusunun küçük çemberle ikinci kesişim noktası D olsun. $B\hat{O_1}A = D\hat{O_2}A$ olduğundan, $\overset{\triangle}{BO_1A} \sim \overset{\triangle}{DO_2A}$.

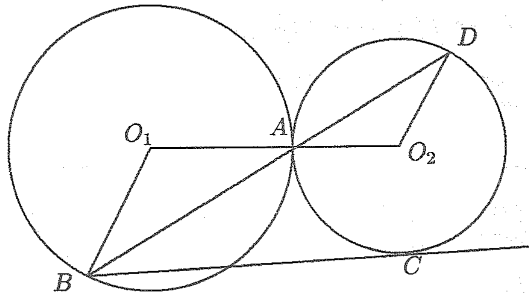
Buradan, $\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|O_2D|}{|O_1B|}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$|AD|=|AB|.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$|BC|^2=|BA|.|BD|=\sqrt{2}.(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})=3$

$\Rightarrow |BC|=\sqrt{3}$.

YANIT A



ŞİİRSEL MATEMATİK ...

Güzel ve zariftir enaz şiir kadar
Rasyonel düşünme gücüne güç katar
Tutkunları takdir edilmeli, zira
Matematik aşkı kafayı dinç tutar

Anonim