SÜREKLİ KESİRLER

İsmail Aslan
İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR
e-posta: iaslan@likya.iyte.edu.tr

Bu yazıda rasyonel yaklaşım teorisinde önemli bir yeri olan ve birçok transandantal sayıları oluşturmada kolaylık sağlayan sürekli kesirlerden söz edeceğiz. Sürekli kesirleri, $\frac{11}{8}$ gibi, bileşik kesirlerin bir genelleştirilmesi olarak düşünebiliriz. Örneğin,

$$\frac{11}{8}=1\frac{3}{8}=1+\frac{1}{8/3}=1+\frac{1}{2\frac{2}{3}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{3/2}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

Bu yazım biçimi her $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı için de geçerlidir, yani $a_0, a_1, \ldots, a_r$ pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\frac{p}{q}=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\ldots+\frac{1}{a_r}}}$$

olarak yazılabilir. Gösterim kolaylığı için bunu genellikle $p/q=[a_0,a_1,\ldots,a_r]$ şeklinde ifade ederiz. Ayrıca belirtelim ki irrasyonel sayıları da sürekli kesirler şeklinde ifade etmek olanaklıdır. Örneğin, $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısını göz önüne alacak olursak

$$\sqrt{3}=1+.7320508\ldots=1+\frac{1}{1+.3660254\ldots}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+.7320508\ldots}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+.3660254\ldots}}}}$$

Bu tür kesirleri sonsuz sürekli kesir olarak isimlendirmek yerinde olacaktır. Sadece rasyonel sayıların sonlu sürekli kesir olarak yazılabileceğine dikkat edilmelidir. Genel olarak her x gerçel sayısının $x=[a_0(x),a_1(x),\ldots]$ şeklinde bir açılımı vardır. Örneğin,

$$\pi=[3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,\ldots]$$

ve

$$e=[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1,14,1,1,16,\ldots]$$

Bir sayının sürekli kesir olarak açılımının en önemli özelliği, baştan itibaren alınan rakamlardan oluşturulan kısmın, genellikle bir **yakınsama** olarak adlandırılır, açılımı yapılan sayıya çok iyi bir yaklaşım sağlamasıdır. Diğer bir deyişle, $[a_0,a_1,\ldots,a_n]$ sürekli kesirinin k-inci yakınsaması, $c_k=[a_0,a_1,\ldots,a_k]$ olarak tanımlanır. Burada $k\geq n$ için $c_k=[a_0,a_1,\ldots,a_n]$ olduğuna dikkat edelim. Örneğin, $[1,2,3,4]$ sürekli kesiri için,

$$c_0=1$$

$$c_1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$c_2=1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}=\frac{10}{7}$$

$$c_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3+\frac{1}{4}}} = \frac{43}{30}$$

ve $c_4 = c_5 = \ldots = \frac{43}{30}$ dır. Başka bir örnek için,

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \ldots]$$

sayısını ele alırsak, ilk iki rakamdan oluşan bir yakınsama

$$c_1 = [3, 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

olup, bu sayı π sayısına iyi bir yaklaşık değerdir. Diğer bir yaklaşık değer için 292 den önce gelen rakamları alarak oluşturacağımız yakınsama olan

$$c_3 = [3, 7, 15, 1] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15+\frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3.14159292\ldots$$

sayısını elde ederiz ki bu da $\pi = 3.141592653\ldots$ sayısına oldukça yakın bir değerdir. Yaptığım bu girişten sonra sürekli kesirlerin matematik tarihindeki yerinden söz etmek yerinde olacaktır. Sürekli kesirler, bir milenyum olmasa da, yüzyıllarca insanlığı büyülemişitr. Kutsal oran(bu terim Rönesans'tan gelmektedir) ve kendine- benzerlik özelliklerine sahip bir dikdörtgenin oluşturulması çabaları,

$$\phi \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}$$

altın oranının sürekli kesir açılımının geometrideki kopyasından başka bir sey değildi. Sürekli kesirlerin çıkış noktasını tam olarak belirlemek oldukça zordur. Bu zorluk, sürekli kesirlerle matematikte son 2000 yılda karşılaşılması fakat 1600'ların başlarına ve 1700'lerin sonlarına kadar geçen süreçte bu kavramın tam olarak oturtulamamasından kaynaklanmaktadır. Buna karşın, sürekli kesirlerin kökeni, geleneksel olarak, Öklid Algoritmasının yaratıldığı zamanla çakıştırılır. Öklid Algoritması iki sayının en büyük ortak bölenini(ebob) bulmada kullanılır. Bu Algoritmayı ustaca kullanarak, p ve q nın ebob'unu bulmanın yerine, p/q rasyonel sayısının sürekli kesir açılımını bulabiliriz. Bunu görebilmek için, örneğin, 348 ve 124 sayılarına Öklid Algoritmasını **tekrarlı** olarak uygulayalım.

$$348 = 124 \times 2 + 100$$

$$\frac{348}{124} = 2 + \frac{100}{124} = 2 + \frac{1}{\frac{124}{100}}$$

$$124 = 100 \times 1 + 24$$

$$\frac{124}{100} = 1 + \frac{24}{100} = 1 + \frac{1}{\frac{100}{24}}$$

$$100 = 24 \times 4 + 4$$

$$\frac{100}{24} = 4 + \frac{4}{24} = 4 + \frac{1}{\frac{24}{4}}$$

$$24 = 6 \times 4$$

Bütün bu kesirler yerlerine konulup yeniden yazılırsa, $\frac{348}{124} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{6}}}$ sürekli kesiri elde edilir ve kısaca $\frac{348}{124} = [2, 1, 4, 6]$ olarak ifade edilir.

Öklid ve kendinden öncekilerin bu Algoritmayı sürekli kesirleri oluşturmada kullanıp kullanmadıkları tartışmalıdır. Fakat Öklid Algoritmasının sürekli kesirlerle olan yakın ilişkisinden dolayı, Öklid Algoritmasının keşfinin sürekli kesirlerin gelişimine yol açtığı yaygın bir inanıştır

Yıllar içinde yapılan ve sürekli kesirleri içeren herhangi bir çalışma çok özel örneklerle sınırlıydı. Hintli matematikçi Aryabhata (M.S. 550), sürekli kesirleri doğrusal belirsiz denklemleri çözmek için kullanmıştı. Yunan ve Arap matematik yazınında da sürekli kesirlerin izleri ve örnekleri ile karşılaşmak şaşırtıcı olmasa gerek. Tabii ki bunların kullanışı yine özel örneklerle kısıtlıydı.

Sürekli kesirler, Wallis'in(1616-1703) çalışmaları esnasında başlıbaşına bir ilgi alanı oldu. Wallis,

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \ldots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 9 \ldots}$$

özdeşliğini geliştirdi. Brouncker(1620-1684), bu özdeşliği

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\frac{7^2}{\ldots}}}}$$

olarak belirledi. Brouncker, sürekli kesir kavramını o zaman düşünmemişti ama Wallis ilk adımı atarak sürekli kesirler teorisini genelleştirmede ve göz kamaştırıcı bir konu olmasında büyük rol oynadı.

Sürekli kesirlerin uygulanmasına ilginç bir örnek olarak yazıcılardan çıktı aldığımız A4 boyutundaki kağıtları göz önüne alalım. Bir A4 kağıdı kendine-benzerlik özelliğine sahiptir. Yani, kağıt katlanıldığında, kenarları arasındaki ilk oranla yaklaşık olarak aynı olan bir oran elde edilir. Bilindiği gibi bir A4 kağıdının boyu 29.7 cm. ve genişliği de 21 cm. olarak tanımlanmıştır. Kenarlar arasındaki oranı hesaplarsak, $\frac{29.7}{21} = \frac{99}{70} = [1, 2, 2, 2, 2, 2]$ elde ederiz. Ayrıca $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \ldots]$ olduğundan, $\frac{29.7}{21}$ oranının $\sqrt{2}$ sayısına bir yakınsama olduğu görülecektir.

Şimdi de, kısaca, sürekli kesirler teorisinden söz edelim. Bunu yapabilmek için bazı tanımlara ve teoremlerin ifadelerine gereksinimimiz olacak. $a_1, a_2, \ldots$ ve $b_1, b_2, \ldots$ sayıları gerçel ya da kompleks sayılar olmak üzere

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2+\frac{b_2}{a_3+\frac{b_3}{\ldots}}}}$$

biçimindeki ifadeye bir **sürekli kesir** denir. Burada a_i ve b_i sayıları sonlu ya da sonsuz sayıda olabilir. Her i için $b_i = 1$ olması durumunda, elde edilen kesire **basit sürekli kesir** denir. Basit sürekli kesirler, kısaca, $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ şeklinde gösterilirler. Ayrıca terimlerin sayısı sonlu(sonsuz) ise sonlu(sonsuz) basit sürekli kesir terimi kullanılır. Bu tanımlamalardan sonra, sayılarla ilgili iki güzel teoremi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Teorem: Bir sayının rasyonel olması, o sayının sonlu sayıda terim içeren basit sürekli kesir olarak ifade edilmesiyle eşdeğerdir.

Bu arada, herhangi bir rasyonel sayının birden fazla sürekli kesir açılımına sahip olabileceğini de belirtelim. Örneğin,

$$\frac{47}{17} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3+\frac{1}{4}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}}$$

Teorem: Her irrasyonel sayının basit sürekli kesir açılımı sonsuz sayıda terim içerir.

Bu teoremlerin kanıtları zor olmamakla beraber, ilgili okuyucu kaynaklarda belirttiğimiz çalışmalara başvurabilirler. Yazımızı birkaç sürekli kesir örnekleri ile noktalayalım:

$$\frac{14}{11} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2-\frac{1}{3-\frac{1}{2}}}} \qquad \frac{9x+14}{7x+11} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}}$$

$$e^x = \frac{1}{1 - \frac{x}{1+\frac{x}{2-\frac{x}{3+\frac{x}{\cdots}}}}} \qquad \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5-\frac{x^2}{\cdots}}}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)e^{2\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1+\frac{e^{-4\pi}}{1+\frac{e^{-6\pi}}{1+\cdots}}}}$$

Yukarıdaki en son kesir, matematik dehası S. Ramanujan'ın bir buluşudur.

KAYNAKLAR

[1] Brezinski, C: History of Continued Fractions and Pade Approximations, Springer-Verlag, New York, 1980

[2] Olds,C.D: Continued Fractions, Random House, New York, 1963