BİR GENİŞLEME TEOREMİ (II)

Nurettin Ergun
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü, Vezneciler/İSTANBUL

III. Hausdorff'un Genişleme Teoremi

Evet, artık bunca bilgiyle donatıldıktan sonra bu yazının ana sonucunu ve kanıtlamasını görelim. Aşağıdaki kanıtlamayı okumadan önce temel bilgiler kısmında anlatılanları bir kez daha sindirerek okumanızı öneririz.

Hausdorff Teoremi (1919): Metrik bir uzayın kapalı bir alt uzayında tanımlı olan her sürekli ve sınırlı gerçel değerli fonksiyonun uzaya sürekli bir genişlemesi vardır.

Kanıtlama: X üzerinde d metriği tanımlı olsun, genelliği bozmaksızın $0 \leq d \leq 1$ alabiliriz, çünkü X üzerindeki topolojiyi, bu son koşulu gerçekleyen ve d metriğine eşdeğer olan bir metriğin belirlediğini, anımsayacağınız gibi, zaten göstermiştik. Alt uzay kavramını ayrıntılarıyla bilmeden bu kanıtlamayı başarabiliriz, tek bilmemiz gereken (X, τ_d) uzayında kapalı bir K kümesinde tanımlı ve K'nın her noktasında sürekli olan $f : K \to [0,1]$ gerçel değerli fonksiyonun sürekli bir genişlemesinin (X, τ_d) uzayında tanımlanabildiğini göstermektedir. Peki, sınırlı f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında değil, gelişigüzel bir $[a,b]$ aralığında değerler alsaydı ne değişirdi? Bu önemli ve can alıcı soruyu sona bırakalım, şimdi kanıtlamada "teknik kolaylıklar" sağladığı için, her $x \in K$ için $0 \leq f(x) \leq 1$ gerçeklendiğini varsayarak genişleme fonksiyonu tanımlayalım; bu özel varsayım altında kanıtlamayı başarırsak eğer, $f : K \to [a,b]$ durumunda da kolaylıkla başarabileceğimizi sonradan göreceğiz. Şimdi, yine $[0,1]$ aralığında değerler alan

$$F(x) = \begin{cases} inf\{f(y) + \frac{d(x,y)}{d(x,K)} - 1 : y \in K\} & ; \quad x \in X - K \\ f(x) & ; \quad x \in K \end{cases}$$

tanımlayalım. Dikkat edilirse K kapalı olduğundan, herhangi $x \in X - K$ için, negatif olmayan $d(x,K)$ gerçel sayısının sıfır olması yani x noktasının K kümesine yapışık olması söz konusu değildir, kısacası her $x \in X - K$ için tanımda paydada yer alan $d(x,K)$ pozitiftir ve dolayısıyla bu yeni fonksiyon X uzayının tüm noktalarında tanımlıdır ve üstelik K kümesindeki her x noktası için $F(x) = f(x)$ olmaktadır, üstelik F fonksiyonu f'nin bir genişlemesidir, çünkü o da $[0,1]$ aralığında değerler alır:

$$\forall x \in X - K \quad \text{için} \quad F(x) \leq \frac{d(x,y)}{d(x,K)}$$

olur, çünkü $f(y) - 1 \leq 0$ dir ve sonuçta $y \in K$ elemanları üzerinden infimum alarak $F(x) \leq inf \frac{d(x,y)}{d(x,K)} = \frac{1}{d(x,K)} inf\{d(x,y) : y \in K\} = 1$ bulunur. Üstelik $0 \leq \frac{d(x,y)}{d(x,K)} - 1$ ve $0 \leq f(y) \leq f(y) + \frac{d(x,y)}{d(x,K)} - 1$ nedeniyle, her bir $x \in X - K$ için $0 \leq F(x) \leq 1$ ve sonuçta her $x \in X$ için $0 \leq F(x) \leq 1$ bulunur. Şimdi bu yeni fonksiyonun uzayın her noktasında sürekli olduğunu ve dolayısıyla aranan genişleme fonksiyonu olduğunu gösterelim. Bu, uzun ve gerçekten çaba gerektiren bir kanıtlama olacaktır. Öncelikle herhangi bir $x_1 \in X - K$ noktasında sürekliliği gösterelim.

İddia: $\forall x_1, x_2 \in X - K$ için $|F(x_1) - F(x_2)| \leq d(x_1, x_2)\left(1 + \frac{4}{d(x_1,K)} + \frac{4}{d(x_2,K)}\right)$. Bu iddianın kanıtlanması sırasında, yine kısalık ve kolaylık amacıyla $0 < \delta_1 = d(x_1, K)$ yazalım. $x_1 = x_2$ için iddia apaçıktır; eğer $x_1 \neq x_2$ ise $d(x_1, x_2)$ uzaklığı pozitif olacağından, infimum tanımı gereği uygun bir $y \in K$ elemanı için

$$f(y) + \frac{d(x_1,y)}{d(x_1,K)} - 1 < F(x_1) + d(x_1,x_2)$$

gerçeklenir ve üstelik işin ilginç yanı $y \in S(x_1, 3\delta_1)$ olmak zorunadadır, çünkü aksi halde $3d(x_1,K) \leq d(x_1,y)$ olur ve sonuçta

$$2 \leq f(y) + 2 \leq f(y) + \frac{d(x_1,y)}{d(x_1,K)} - 1 < F(x_1) + d(x_1,x_2) \leq 2$$

çelişkisi doğardı. Demek ki yukarıdaki eşitsizliği gerçekleyen aracı y elemanı $K \cap S(x_1, 3\delta_1)$ kümesine aittir ve bunun aracılığı yardımıyla

$$F(x_2) \leq f(y) + \frac{d(x_2,y)}{d(x_2,K)} - 1 < F(x_1) + d(x_1,x_2) + \frac{d(x_2,y)}{d(x_2,K)} - \frac{d(x_1,y)}{d(x_1,K)}$$

bulunur. Oysa son fark için

$$\left|\frac{d(x_2,y)}{d(x_2,K)} - \frac{d(x_1,y)}{d(x_1,K)}\right| \leq \frac{|d(x_2,y) - d(x_1,y)|}{d(x_2,K)} + d(x_1,y)\frac{|d(x_2,K) - d(x_1,K)|}{d(x_1,K)\cdot d(x_2,K)}$$

bulunur, çünkü gerçel sayılarda

$$\left|\frac{1}{b_1}a_1 - \frac{1}{b_2}a_2\right| \leq \frac{1}{|b_1|}|a_1 - a_2| + |a_2|\frac{|b_1 - b_2|}{|b_1 \cdot b_2|}$$

eşitsizliği geçerlidir. $d(x_1,y) < 3\delta_1$ olduğu anımsanırsa, sağ yan

$$\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_2,K)} + \frac{3\delta_1}{d(x_1,K)} \cdot \frac{d(x_1,x_2)}{d(x_2,K)} = 4\frac{d(x_1,x_2)}{d(x_2,K)}$$

ifadesinden ve dolayısıyla $4d(x_1,x_2)\left(\frac{1}{d(x_1,K)} + \frac{1}{d(x_2,K)}\right)$'den küçük kalır. Tüm bunlar

$$F(x_2) - F(x_1) < d(x_1,x_2)\left(1 + \frac{4}{d(x_1,K)} + \frac{4}{d(x_2,K)}\right)$$

verir. x_1 ve x_2'nin rollerini değiştirerek elde edilecek olan benzeri eşitsizlikten yararlanılırsa, yukarıdak iddia elde edilir. Oysa temel bilgiler kısmında gözlediğimiz gibi $\forall x \in X$ için $g(x) = d(x,K)$ biçiminde tanımlanan gerçel değerli g fonksiyonu sürekli (aslında düzgün sürekli) olduğundan, x_1 noktasındaki süreklilik gereği

$$\forall x \in S(x_1,\epsilon_1) \quad \text{için} \quad g(x) \in \left(g(x_1) - \frac{\delta_1}{2}, g(x_2) + \frac{\delta_1}{2}\right)$$

olacak biçimde $0 < \epsilon_1$ vardır; kısacası $x \in S(x_1,\epsilon_1)$ için $\frac{\delta_1}{2} = g(x_1) - \frac{\delta_1}{2} < g(x) = d(x,K)$ ve dolayısıyla $\frac{1}{d(x,K)} < \frac{2}{\delta_1}$ bulunur. O halde iddiadaki eşitsizlik kullanılacak olursa, çok zorlanmadan

$$\forall x \in S(x_1,\epsilon_1) \quad \text{için} \quad |F(x) - F(x_1)| \leq \left(1 + \frac{12}{\delta_1}\right) d(x,x_1)$$

bulunur. Burada $c_1 = 1 + \frac{12}{\delta_1}$ sabitinin yalnızca sürekliliğin incelendiği $x_1 \in X - K$ noktasına bağlı olduğu gözlenmelidir. Tüm bunların sonunda, $0 < \delta_\epsilon < min\{\epsilon_1, \frac{\epsilon}{c_1}\}$ pozitif sayısı seçilirse her bir $x \in S(x_1,\delta_\epsilon)$ için $|F(x) - F(x_1)| < \epsilon$ gerçekleşir, kısacası F fonksiyonu x_1 noktasında sürekli olur. Şimdi de F fonksiyonunun herhangi bir yakınsak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$ gerçeklendiğini kanıtlayarak gözleyelim. Dikkat: K kümesi kapalı olduğundan $\partial K \subseteq \overline{K} = Y(K) \subseteq K$ geçerlidir ve dolayısıyla $x_0 \in K$ ve $F(x_0) = f(x_0)$ ilk gözlemimizdir. Ayrıca herhangi bir $x \in X - K$ elemanı için $x \neq x_0$, $\quad 0 < d(x,x_0)$ ve dolayısıyla $inf\{d(x,y) : y \in K\} = d(x,K) < d(x,K)\cdot(1 + d(x,x_0))$ geçerli olduğundan uygun bir $0 < \epsilon_x$ ve $y_x \in K$ sayesinde $d(x,y_x) < inf\{d(x,y) : y \in K\} + \epsilon_x < d(x,K)\cdot(1+d(x,x_0))$ bulunur; dikkat edilsin: a ve b gerçel sayıları için $a < b$ ise $a + \frac{b-a}{3} < b - \frac{b-a}{3} < b$ geçerli olur. O halde bu aracı $y_x \in K$ elemanı sayesinde $F(x) \leq f(y_x) + \frac{d(x,y_x)}{d(x,K)} - 1 \leq f(y_x) + d(x,x_0)$ bulunur. Ayrıca yukarıda yapıldığı gibi, uygun bir $y'_x \in K \cap S(x, 3\delta_x)$ elemanı yardımıyla $f(y'_x) + \frac{d(x,y'_x)}{d(x,K)} - 1 < F(x) + d(x_0,x)$ ve sonuçta

$$f(y'_x) - d(x,x_0) < F(x) - \left(\frac{d(x,y'_x)}{d(x,K)} - 1\right) \leq F(x)$$

bulunur. Burada $\delta_x = d(x, K) > 0$ yazılmıştır. Demek ki her bir $x \in X - K$ elemanı için aracı elemanlar yardımıyla

$$f(y'_x) - d(x, x_0) < F(x) < f(y_x) + d(x, x_0) \qquad (*)$$

bulunur. Oysa $x_0 \in \partial K \subseteq \overline{X - K}$ olduğundan, tüm terimleri $X - K$ açık kümesinden alınmış ve $\lim_{n\to\infty} = x_0$ yani $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$ gerçekleyen herhangi bir yakınsak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için de bu eşitsizlikler yardımıyla

$$f(y'_n) - d(x_0, x_n) < F(x_n) < f(y_n) + d(x_0, x_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

gerçeklenecek biçimde aracı $y_n, y'_n \in K$ noktaları var olacaktır. Dikkat edilirse $y_n \in K$ noktalarının tanımı gereği $0 \leq d(x_n, y_n) < d(x_n, K) \cdot (1 + d(x_0, x_n))$ gerçekleşmektedir. Oysa $0 \leq |d(x_n, K) - d(x_0, K)| \leq d(x_0, x_n)$ nedeniyle $\lim_{n\to\infty} d(x_n, K) = d(x_0, K) = 0$ ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ elde edilir. Limit işlemi yardımıyla, kanıtlamanın nasıl başarıyla sürdürüldüğünün ayrımına varıyorsunuz değil mi sevgili okurlar? Daha bitmedi! Üstelik $0 \leq d(y'_n, x_n) \leq 3d(x_n, K)$ gerçeklendiğini, $y'_n \in K \cap S(x_n, 3d(x_n, K))$ elemanlarının tanımından çıkarırız. O halde önce $\lim_{n\to\infty} d(y'_n, x_n) = 0$ ve sonra da bu sonuçtan ve $0 \leq d(y_n, x_0) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_0)$ eşitsizliklerinden kolayca $\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_0) = 0$ buluruz. Demek ki bu aracı $y_n, y'_n \in K$ elemanlarının belirlediği diziler için sırasıyla $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ ve $\lim_{n\to\infty} y'_n = x_0$ sonuçlarına ulaşırız. Oysa gerçel değerli f fonksiyonu K kümesinin her noktasında ve özellikle $x_0 \in K$ noktasında sürekli olduğundan sonuçta $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$ ve $\lim_{n\to\infty} f(y'_n) = f(x_0)$ elde ederiz. Şimdi yukarıda bulunan (*) eşitsizlikleri kullanılarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(y'_n) - f(x_0) - d(x_0, x_n) \leq F(x_n) - f(x_0) \leq f(y_n) - f(x_0) + d(x_0, x_n)$$

geçerli olduğundan, sol ve sağ yanı sıfır gerçel sayısına yakınsadığı için sonuçta $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = f(x_0) = F(x_0)$ buluruz. Evet, arkanıza yaslanıp biraz soluklanın, işin önemli kısmını başardık. "Peki geriye ne kaldı, tanrı aşkına?" diye sorabilirsiniz. Ufak ama önemli ayrıntılar kaldı. Dikkat edilirse F fonksiyonunun $x_0 \in \partial K$ noktasında süreklilik kanıtlamasının tam anlamıyla bitirilmiş olması için x_0 noktasına yakınsayan her tür $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için bu son sonucun gösterilmesi gerekir. Ama böyle bir dizinin ister **i)** sonlu tanesi dışında tüm terimleri K kümesinden seçilmiş olsun, ister **ii)** sonlu tanesi dışında tüm terimleri $X - K$ kümesinden seçilmiş olsun ve isterse **iii)** sonsuz sayıda terimi K kümesinden ve sonsuz sayıda terimi $X - K$ kümesinden seçilmiş olsun, hep $F(x_n) \to f(x_0)$ gerçekleşecektir, nedenini kolayca gösterebileceğinizi umuyorum. Son irdelenmesi gereken durum ise F fonksiyonunun herhangi bir $x_0 \in ic(K)$ noktasında sürekli olduğunu göstermektir, oysa bu durumda $S(x_0, \epsilon_0) \subseteq K$ gerçekleyen bir açık yuvar vardır ve bu yuvardaki tüm noktalarda F ve f eşit değerler alırlar ve f fonksiyonu bu yuvarın tüm noktalarında süreklidir, sorun kalmaz. Kısaca sonuç olarak F fonksiyonu tanımlandığı metrik uzayın her noktasında süreklidir. Evet, yazının sonunda şimdi, ya $f : K \to [a, b]$ ya da $f : K \to \mathbb{R}$ olması durumlarında sürekli bir genişleme fonksiyonu var mıdır acaba, bunları bir araştıralım bakalım. Birinci durumda $g(x) = \frac{f(x)-a}{b-a}$ biçiminde tanımlanan sürekli ve gerçel değerli $g : K \to [0, 1]$ fonksiyonunun tüm uzaya yapılan sürekli genişlemesini $G : X \to [0, 1]$ ile gösterecek olursak, $F(x) = a + (b - a)G(x)$ fonksiyonunun sürekli olsduğunu, $F : X \to [a, b]$ gerçeklendiğini ve üstelik her bir $x \in K$ için $F(x) = a + (b - a)g(x) = f(x)$ gerçekleştiğini kolayca görürüz. Peki ya $f : K \to \mathbb{R}$ durumunda ne yapabiliriz? "Ama nasıl olur, bu durumda $f(K)$ görüntü kümesinin sınırlı bir aralık tarafından kapsanmış olması güvence altında değil ki, Hausdorff genişleme teoremini nasıl uygulayabiliriz?" diye sorabilirsiniz. Oysa her $x \in \mathbb{R}$ için $h(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ olmak üzere hof bileşke fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığında değerler aldığını ve üstelik h fonksiyonunun bire-bir ve sürekli olduğunu gözlemek güç değildir. Peki ya sonra... neler yapılmalıdır? Çok kolay sevgili okurlar, biraz dikkat lütfen. Yazının sonunda sizlere bir önerim var. Önce biraz soluklanın sonra biraz müzik dinleyin, örneğin büyük türkü ustası Ruhi Su'nun Pir Sultan Abdal'ını ve daha sonra Hausdorff'un şu güzelim kanıtlamasını bir kez daha okuyun, usta işi matematiğin değerine varın. İyi çalışmalar sevgili okurlar!