PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü,Urla/İzmir adresine 31 Mayıs 2001 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.226. ABC üçgeninde açıortayların kesişim noktası I, iç teğet çemberin yarıçapı ise,

$$|AI| + |BI| + |CI| \geq 6r \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

A.227. Bir pozitif tamsayının ard arda gelen herhangi iki rakamının oluşturduğu iki basamaklı sayı 17 'ye veya 23 'e bölünüyorsa, bu sayıya "ilginç sayı" diyelim. Kaç tane 2001 basamaklı ilginç sayı vardır?

A.228. Her pozitif gerçel a, b, c sayıları ve pozitif n sayısı için

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^n + \left(\frac{b+c}{a}\right)^n + \left(\frac{c+a}{b}\right)^n \geq 3 \cdot 2^n$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

A.229. Tüm gerçel sayılar kümesinde tanımlı olan f fonksiyonu her x için

$$f(x+3) \leq f(x) + 3, f(x+2) \leq f(x)$$

eşitsizliklerini sağlar. $g(x) = f(x) - x$ fonksiyonunun periyodik olduğunu gösteriniz.

A.230. N arkadaş birkaç kere beraber tiyatroya gittiler. Her gidişlerinde aynı sırada bulunan yan-yana N koltuğu paylaştılar. Her ikili tam bir kez yan-yana oturdular. N'nin çift sayı olduğunu gösteriniz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.226. Pozitif tamsayılardan oluşan kesin olarak artan sonsuz dizide 4.'den başlayarak her terimin karesi bundan daha önce gelen herhangi üç terimin kareleri toplamına eşittir. Bu dizide sonsuz sayıda bileşik sayıya rastlanacağını ispat ediniz.

Y.227. 5x5 boyutlu tabloya 1' den 25'e kadar olan pozitif tam sayılar yazılmıştır. İçerdikleri sayılar arasındaki fark en az 5 olacak şekilde iki komşu hane bulunacağını gösteriniz. Not: Bir ortak kenarı bulunan iki haneye komşu haneler denir.

Y.228. $a_0, a_1, ..., a_n$ pozitif sayılar olmak üzere $x^{n+1} + a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_0$ polinomunun $x_0, x_1, ...x_n$ kökleri için $x_n \leq x_{n-1} \leq ... \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0$ eşitsizlikleri sağlanır. $-x_1, -x_2, ... - x_n$ sayılarının $x^n - nx^{n-1} + b_n - 2x^{n-2} + ... + b_2x^2 - nx + 1$ polinomunun kökleri olduğu bilinirse, $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n$ olduğunu gösteriniz.

Y.229. ABC üçgeninin BC, CA ve AB kenarları üzerinde, $|AA| \leq 1, |BB| \leq 1, |CC| \leq 1$ olacak şekilde sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 noktaları alınmıştır. ABC üçgeninin alanının $\frac{1}{\sqrt{3}}$'ü aşmadığını gösteriniz.

Y.230. Öğle saatinde (12:00'de) üç sinekten biri saatin akrepinin, diğeri yelkovanın ve üçüncüsü de saniye göstergesinin üzerine oturdular. Bunlardan biri diğerine yetiştiğinde yer değiştirdiler (saniye göstergesi aynı zamanda yelkovana ve akrepe yetiştiğinde saniye göstergesi ve akrep üzerindeki sinekler yer değiştirdiler). Gece yarısına kadar sineklerin her biri kaç kez merkez etrafında döndü?

ÇÖZÜMLER

A.216. ...12345678987654321 biçiminde olup 1999^{2000} sayısına bölünen doğal sayı var mıdır?

Çözüm. Evet vardır. Yazılımın kolaylığı için $A = 12345678987654321, B = 1999^{2000}$ diyelim ve $B + 1$ tane $A, \overline{AA}, \overline{AAA}, ..., \overline{AA...A}$ sayılarına bakalım. Bu sayılar içinde B'ye eşit kalanla bölünen en az ikisi vardır. Söz konusu iki sayının farkı olan

$$\underbrace{\overline{AA...A}}_{\text{k tane}} - \underbrace{\overline{AA...A}}_{\text{m tane}} = \underbrace{\overline{AA...A}}_{\text{m tane}} \cdot 10^{k-m}$$

sayısı, B'ye tam bölünecektir. Fakat 10^{k-m} ile B sayısı aralarında asal olduğundan, $\underbrace{\overline{AA...A}}_{\text{m tane}}$ sayısı B'ye bölünmek zorundadır.

A.217. $x^3 - 6x^2 + ax + a = 0$ denkleminin kökleri olan x_1, x_2 ve x_3 sayılarının $(x_1-3)^3 + (x_2-3)^3 + (x_3-3)^3 = 0$ eşitliğini sağlamasını garanti eden a sayılarının hepsini bulunuz.

Çözüm. $y = x - 3$ diyelim. O halde, $y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 3, y_3 = x_3 - 3$ sayıları

$(y+3)^3 - 6(y+3)^2 + a(y+3) + a = y^3 + 3y^2 + (a-9)y + 4a - 27$ polinomunun kökleri olacaktır. Vieta teoremine göre,

$y_1 + y_2 + y_3 = -3,$

$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = a - 9,$

$y_1y_2y_3 = 27 - 4a$ eşitlikleri sağlanacaktır. Şimdi biz a parametresini, hem Vieta eşitlikleri ve hem de $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0$ eşitliği sağlanacak biçimde seçmek istiyoruz. Direkt hesaplamalarla aşağıdaki özdeşliği kontrol edebilirsiniz:

$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (y_1 + y_2 + y_3)^3 - 3(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3y_1y_2y_3$. Yukarıdaki eşitlikleri bu son özdeşlikte göz önüne alırsak, $0 = (-3)^3 - 3(a-9)(-3) + 3(27-4a) = -27 - 3a, a = -9$ elde ederiz.

A.218. Toplamları 1'e eşit olan herhangi pozitif $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{2-\alpha_i} \geq \frac{n}{2n-1}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

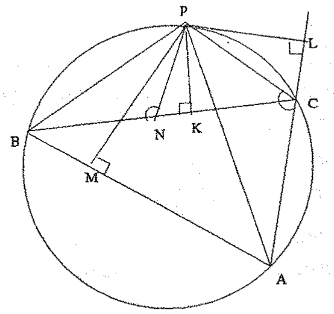
Çözüm. $\beta_i = 2 - \alpha_i, (i = 1, 2, ..., n)$ diyelim. O halde,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2n - 1$$

olacaktır. Şimdi Aritmatik ve Geometrik Ortalamalar arasındaki eşitsizliği kullanarak,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{2-\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i + \beta_i}{\beta_i} - n =$$

$$2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} - n \geq 2\frac{n}{\sqrt[n]{\beta_1\beta_2...\beta_n}} - n \geq$$



Şekil1

$$\frac{2n^2}{\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n} - n = \frac{2n^2}{2n-1} - n = \frac{n}{2n-1}$$

elde ederiz.

A.219. Üçboyutlu uzayı, bir-biriyle keşismeyen ve bir-birine kongruent olan 1001 tane kümenin birleşimi biçiminde ifade etmek mümkün müdür?

Çözüm. Evet mümkündür. Üç boyutlu uzayın söz konusu parçalanmasına bir örnek gösterelim. $OXYZ$ kordinat sisteminde düşüneceğimiz (x, y, z) noktalarını şöyle sınıflandıralım: $M_i (i = 1, 2, ...1001)$ kümesine, ilk koordinat x'in tam değerinin

$$[| \; x \; |] \equiv i \quad (mod 1001)$$

denkliğini sağladığı (x, y, x) noktalarına ait edelim. Kolayca anlaşılacağı gibi, M_i ler ikişer-ikişer kesişmiyorlar, bir-birine kongruentler ve birleşimleri tüm uzayı vermektedir.

A.220. Bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin BC yayı üzerinde alınmış bir P noktasından, BC, AC, AB doğrularına, sırasıyla, PK, PL, PM dikleri indirilmiştir.

$$\frac{|BC|}{|PK|} = \frac{|AC|}{|PL|} + \frac{|AB|}{|PM|}$$

eşitliğini sağlayınız.

Çözüm. BC parçası üzerinde $\widehat{PNB} = \widehat{PCA}$ sağlanacak biçimde N noktası vardır. (Çünkü: $\widehat{PCB} < \widehat{PCA} = 180 - \widehat{PCB}$; şekil 1'den izleyiniz). Şimdi,

$$\overset{\triangle}{BPN} \sim \overset{\triangle}{APC} \quad ve \quad \overset{\triangle}{CPN} \sim \overset{\triangle}{APN} \qquad (1)$$

bağıntılarını yazabiliriz. Şekilden, PK'nın BPN ve CPN üçgenlerinin ve PL ile PM'nin ise sırasıyla, APC ve APB üçgenlerinin yükseklikleri olduğunu görebiliriz. (1) bağıntısını da gözönüne alarak şunları yazabiliriz.

$$\frac{|AC|}{|PL|} = \frac{|BN|}{|PK|}, \frac{|AB|}{|PM|} = \frac{|CN|}{|PK|}$$

Bu son bağıntılardan

$$\frac{|AC|}{|PL|} + \frac{|AB|}{|PM|} = \frac{|BN|}{|PK|} + \frac{|CN|}{|PK|} = \frac{|BN|+|CN|}{|PK|} = \frac{|BC|}{|PK|}$$

elde edilir.

Y.216. $abc = 1$ ve $a^3 > 36$ ise,

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$$

eşitsizliğinin sağlanacağını kanıtlayınız.

Çözüm.

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - ab - bc - ca =$$

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + \frac{a^2}{12} =$$

$$(\frac{a}{2} - b - c)^2 - 3bc + \frac{a^2}{12} = (\frac{a}{2} - b - c)^2 + \frac{a^2}{12} - \frac{3}{a} =$$

$$(\frac{a}{2} - b - c)^2 + \frac{a^3 - 36}{12a}$$

ifadesinde $a^3 - 36 > 0$ olduğunu gözönüne alırsak, istenen eşitsizlik ispat edilmiş olur.

Y.217. Düzlem hanelere bölünmüş ve bu hanelerden rastgele 100 tanesi işaretlenmiştir. İspat ediniz ki, bir biriyle hiç ortak noktası olmayan en az 25 tane işaretlenmiş hane vardır.

Çözüm. Tüm düzlemi, her biri 4 haneden oluşan karelere bölelim ve her karenin üst sağ hanesini siyaha, üst sol hanesini beyaza, alt sağ hanesini kırmızıya, alt sol hanesini de maviye boyayalım. Aynı renge boyanmış hanelerin hiç ortak noktasının olmadığı açıktır. Şimdi, 100 tane işaretlenmiş hanenin en az $\frac{1}{4}$'ü (yani, en az 25 tanesi) aynı renge boyanmış olduğundan, işte bu haneler problemde iddia edilen özelliğe sahip olacaklardır.

Y.218. Her $x \in [-1, 1]$ için $|P(x)| \leq 1$ koşulunu sağlayan $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d \in \Re)$ polinomlar kümesine M diyelim. Bu takdirde, öyle A sabiti vardır ki, M 'den olan her polinomun baş katsayısı a için $|a| \leq A$ eşitsizliği sağlanacaktır; kanıtlayınız.

Çözüm. Öncelikle, $P_0(x) = 4x^3 - 3x$ polinomunun M 'den olduğunu gözlemleyelim. Gerçekten, $P_0(-1) = -1, P_0(1) = 1$ ve yerel ekstremum noktaları olan $\frac{1}{2}$ ve $\frac{-1}{2}$ noktalarında $P_0(\frac{-1}{2}) = 1$, $P_0(\frac{1}{2}) = -1$ olduğundan, her $x \in [-1, 1]$ için $|P_0(x)| \leq 1$ eşitsizliği sağlanacaktır.

Şimdi gösterelim ki, problemde adı geçen A sayısı olarak, $P_0(x)$ 'in baş katsayısı olan 4 alınabilir; yani, M 'den olan her $P(x)$ polinomu için $|a| \leq 4$ olacaktır.

Aksini varsayalım: Öyle $P_1(x)$ polinomu vardır ki, $\forall x \in [-1, 1]$ için $|P_1(x)| \leq 1$ olmasına rağmen, $|a| > 4$ 'tür.

$$Q(x) = P_0(x) - \frac{4}{a}P_1(x)$$

polinomunu ele alalım. Q(x)'in derecesi 2'den fazla değildir. Öte yandan

$$|\frac{4}{a}P_1(x)| = \frac{4}{|a|}\cdot|P_1(x)| < |P_1(x) \leq 1 \Rightarrow |\frac{4}{a}P_1(x)| <$$

olduğundan, $Q(-1) < 0$, $Q(\frac{-1}{2}) > 0$, $Q(\frac{1}{2}) < 0$ ve $Q(1) > 0$ olur. Buradan $Q(x)$ polinomunun en az üç kökü olduğunu söyleyebiliriz. Oysa, $Q(x)$ polinomunun derecesi 3'ten küçüktür. Çelişki.

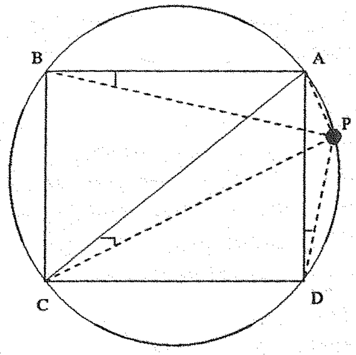
Y.219. Köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir kare verilmiştir. Çember üzerinde alınmış herhangi noktadan karenin köşelerine kadar olan uzaklıkları gösteren dört sayıdan en az birinin irrasyonel olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Çember üzerinde rastgele P noktası alalım ve şekildeki $|PA|$, $|PB|$, $|PC|$, $|PD|$ uzaklıklarının hepsinin rasyonel sayı olamayacağını gösterelim. Karenin AC köşegenini (bu hem de çemberin çapıdır) çizelim ve onun uzunluğuna d diyelim. Ayrıca, $\widehat{ABP} = \widehat{ACP} = \widehat{ADP} = \alpha$ diyelim. Şekilden,

$$|AP| = dSin\alpha, \quad |CP| = dCos\alpha,$$

$$|BP| = dSin(\widehat{PDB}) = dSin(\alpha + 45) =$$

$$d(Sin\alpha + Cos\alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(|AP| + |CP|)$$



olduğu görülür. Buradan, $|AB|$ ve $|BP|$' nin rasyonel olması halinde $|BP|$' nin irrasyonel olacağı açıktır.

Y.220. Alanı S olan A_1, A_2, A_3 üçgeninin $A_i, (i = 1, 2, 3)$ tepesinden çıkan yüksekliğine A_iH_i diyelim. $A_1A_2A_3$ üçgeninin eşkenar olması için gerek ve yeter koşulun

$$S = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{3} |A_iA_{i+1}| \cdot |A_iH_i|, \quad (A_4 = A_1)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $a_1 = |A_2A_3|$, $a_2 = |A_1A_3|$, $a_3 = |A_1A_2|$, $h_1 = |A_1H_1|$, $h_2 = |A_2H_2|$, $h_3 = |A_3H_3|$ diyelim.

Bu takdirde, Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden, $a_3h_1 + a_1h_2 + a_2h_3 = a_1h_1\frac{a_3}{a_1} + a_2h_2\frac{a_1}{a_2} + a_3h_3\frac{a_2}{a_3} = 2S(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3}) \geq 2S \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{(\frac{a_3}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3})} = 6S$

Sonuncu eşitsizliğin eşitliğe dönüşmesi için gerek ve yeter koşul,

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Böylece, $a_3h_1 + a_1h_2 + a_2h_3 = 6S$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul, $a_1 = a_2 = a_3$ olmasıdır.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla,İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.