ÖKLİD ALGORİTMASININ BİR UYGULAMASI

İsmail Aslan
İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR
e-posta: iaslan@likya.iyte.edu.tr

$n \times n$ tipinde bir A matrisini göz önüne alalım. m pozitif tamsayı olmak üzere, $A \cdot A \cdots A$ (m çarpan) çarpımı yine bir $n \times n$ matrisidir, bunu A^m ile gösterelim. Bu yazıda, zengin uygulama alanı olan Öklid Algoritmasını (Bkz.[1]) kullanarak, m nin büyük değerleri için,

$$a_k A^m + a_{k-1} A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n$$

matris polinomlarının hesaplanmasından söz edeceğiz (Burada I_n, $n \times n$ tipindeki birim matrisi göstermektedir). Bu amaçla, öncelikle bazı tanımlara ve teoremlere gereksinimimiz olacak.

Tanım: Eğer $AV = \lambda V$ olacak şekilde sıfır olmayan $n \times 1$ tipinde bir V matrisi varsa, λ sayısına, A matrisinin bir **özdeğeri** denir.

A matrisinin determinantını $|A|$ ile gösterelim ve aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem: λ sayısının A matrisinin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

olmasıdır.

Şimdi k-inci dereceden

$$P(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$$

polinomunu göz önüne alalım. A, bir $n \times n$ matris olmak üzere,

$$P(A) = a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 I_n$$

olarak tanımlayalım. $P(A)$ polinomunun yine bir nxn matris olduğu açıktır.

Tanım: A, bir $n \times n$ matris olmak üzere, $|x I_n - A|$ polinomuna A matrisinin **karakteristik polinomu**, $|xI_n - A| = 0$ denklemine de A matrisinin **karakteristik denklemi** denir.

Teorem: Her $n \times n$ matrisi kendi karakteristik denklemini sağlar.

Yani, A, bir $n \times n$ matris olmak üzere, A matrisinin karakteristik polinomu

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ise

$$A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

dır. **Buradan da bir matrisin karakteristik denkleminin köklerinin sözkonusu matrisin özdeğerlerini verdiği sonucunu çıkarırız.**

Şimdi de polinomlar için **Öklid Algoritması**'nı ifade edelim:
$f(x)$ ve $g(x) \neq 0$ polinomları verilsin ve $f(x)$'in derecesi $g(x)$'in derecesinden büyük ya da eşit olsun. Bu durumda

$$f(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$$

olacak şekilde $q(x)$ ve $r(x)$ polinomları vardır. Burada $r(x)$ polinomunun derecesi, $g(x)$ polinomunun derecesinden küçüktür ya da $r(x) = 0$ dır.

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi için $A^{2001} - 2A^{2000}$ matrisini hesaplayalım. Bu amaçla $f(x) = x^{2001} - 2x^{2000}$ diyelim. A matrisinin karakteristik polinomu

$$|x I_3 - A| = \begin{vmatrix} x+2 & -4 & -3 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & -5 & x-2 \end{vmatrix} = x^3 - x$$

olup, $x^3 - x = 0$ karakteristik denklemini çözerek 0, -1, 1 özdeğerlerini buluruz. Öklid Algoritmasını $x^{2001} - 2x^{2000}$ ve $x^3 - x$ polinomlarına uygulayarak

$$x^{2001} - 2x^{2000} = (x^3 - x)q(x) + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \tag{1}$$

denklemini elde ederiz. Öte yandan A matrisi kendi karakteristik denklemini sağlayacağından, $A^3 - A = 0$ olup, bu gerçeği ve (1) denklemini kullanarak

$$A^{2001} - 2A^{2000} = a_0 I_3 + a_1 A + a_2 A^2 \tag{2}$$

denklemini elde ederiz. Ayrıca (1) denkleminde, 0, -1, 1 özdeğerlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \\ -1 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ -3 &= a_0 - a_1 + a_2 \end{aligned}$$

sistemini elde eder ve buradan da $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ve $a_2 = -2$ olarak buluruz. Böylece (2) denkleminden

$$A^{2001} - 2A^{2000} = a_0 I_3 + a_1 A + a_2 A^2 = A - 2A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisini buluruz.

Öte yandan, $A = (a_{ij})$ olmak üzere, A^k matrisini hesaplamak için *Mathematica* programını kullanmış olsaydık, aşağıdaki komutları işletmek yeterli olacaktı.

$A = \{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}, \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}\}$
matrixpower$[b_, 1] := b$;
matrixpower$[b_, n] := b.$matrixpower$[b, n-1]$;
matrixpower$[A, k]$;

Alıştırma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi için A^{15} matrisini hesaplayınız.

KAYNAKLAR

[1] Koç, C: Öklid Algoritması, Matematik Dünyası, 4, Sayı 1,2-5 (1994)

[2] Kolman, B: Elementary Linear Algebra, Prentice Hall, 1996