# GALİLEO GALİLEİ'NİN İLGİNÇ BİR DİZİSİ

**Ogün Doğru**
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06100, Tandoğan-Ankara

---

Bir çoğumuzun adını duyduğu 17. yüzyılın ünlü astronomi bilgini Galileo Galilei'nin (1564-1642) ilk kez dürbünü uzaya çevirme fikri ile teleskopu bulması, yalnızca yıldızları incelemesini gerektirmedi ve teleskopunu biraz da sayılara çevirerek matematikte de ilginç gözlemler yaptı. Yazımızda bu gözlemlerden birini bulacaksınız.

1615 yılında Galileo ortaya attığı bir fikirde $\frac{1}{3}$ sayısı ile ardışık tek doğal sayılar arasında bir ilişki kurdu. Bu ilişki

$$\frac{1}{3}=\frac{1+3}{5+7}=\frac{1+3+5}{7+9+11}=\dots$$

eşitliklerinin sağlanması idi(Bkz.[1]). Kuşkusuz başlangıçta bu gözlemi ortaya koymak, şimdiki teknikl ispatlamaktan daha zordu.

İspat basittir; $1+3+\dots+(2n-1)=n^2$ eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\frac{1+3+\dots+(2n-1)}{(1+3+\dots+(4n-1))-(1+3+\dots+(2n-1))}=$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{2n}(2k-1)-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}=\frac{n^2}{4n^2-n^2}=\frac{1}{3}$$

olur. Şimdi Galileo'nin bu gözleminden esinlenerek buna benzer bir eşitlik yazalım;

$$\frac{1}{3}=\frac{1^3+3^3}{[2(1+3)-1](5+7)}=\frac{1^3+3^3+5^3}{[2(1+3+5)-1](7+9+11)}=\dots$$

ispat için

$$1^3+3^3+\dots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

(Bkz.[2]) eşitliğinden hareketle

$$\frac{1^3+3^3+\dots+(2n-1)^3}{[2(1+3+\dots+(2n-1))-1]((2n+1)+\dots+(4n-1))}=$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3}{[2\sum_{k=1}^{n}(2k-1)-1][\sum_{k=1}^{2n}(2k-1)-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)]}=$$
$$\frac{n^2(2n^2-1)}{[2n^2-1][4n^2-n^2]}=\frac{1}{3}$$

bulunur.

Şimdi de $\frac{1}{3}$ için bu eşitliklere benzer ilginç başka eşitler yazalım ve yazacağımız eşitliklerin de benzer ispat yöntemi ile basitçe ispatlanabileceklerini söyleyerek ispatları okuyucularımıza bırakalım.

$$\frac{1}{3}=\frac{1^2+3^2}{2(3+5+7)}=\frac{1^2+3^2+5^2}{2(3+5+7+9+11)}=\dots$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1^2+2^2}{5(1+2)}=\frac{1^2+2^2}{5(1+2)}=\frac{1^2+2^2+3^2}{7(1+2+3)}=\dots$$

$$\frac{1}{3}=\frac{5+7}{17+19}=\frac{7+9+11}{25+27+29}=\dots$$

$$\frac{1}{3}=\frac{5+7}{1+3+5+7+9+11}=\frac{7+9+11}{1+3+5+7+9+11+13+15+17}=...$$

Hemen burada "Neden bu ve benzeri eşitlikler 1/3 için geçerli?" sorusu kafanıza takılmasın, çünkü bu tür eşitlikler 1/3'ten farklı kesirler için de geçerli olabilir. Gerçekten payı 1, paydası tek doğal sayı olan tüm kesirli ifadeler için,

$$\frac{1}{2t-1}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{tn}(2k-1)-\sum_{k=1}^{(t-1)n}(2k-1)}$$

eşitliğini yazabilir yazabilir ve bu eşitlik yardımı ile de 1/3, 1/5, 1/7,... şeklindeki bütün kesirler için benzer eşitlikler elde edebiliriz.

Ayrıca, tüm doğal sayıların küplerinin kendi sayıları kadar ardışık tek doğal sayının toplamı olarak yazılabileceğini de belirterek, aşağıdaki eşitliklerle yazımızı noktalayalım.

$$1^3=1$$
$$2^3=3+5$$
$$3^3=7+9+11$$
$$4^3=13+15+17+19$$
$$5^3=21+23+25+27+29$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$n^3=((n-1)n+1)+((n-1)n+3)+...+((n-1)n+2n-1)=\sum_{k=1}^{n}((n-1)n+2k-1)$$

## KAYNAKLAR

[1] O.P. Ma, Galileo's sequences and dangling problem, Amer. Math. Mont. No:1, pp.67-71 (1979).

[2] O. Doğru, Gauss toplamları için açık formüller, Matematik Dünyası, Cilt 8, No:3, sayfa:13-17 (1999).

**Şimdiki Adresim:**

Gülhane Askeri Tıp Akademisi,
Dekanlık Eğitim-Planlama Şubesi, Bilgisayar Ders Kurulu Temsilcisi, 06018, Etlik-Ankara

---

Bir matematikçi, bir şair veya ressam gibi modeller yaratır. Eğer modelleri diğerlerinin modellerinden daha kalıcı ise, düşüncelerle yapıldığındandır...bir satranç problemi, basitçe söylersek, katıksız bir matematik uygulamasıdır.

**G.H. HARDY**