PİSAGOR TEOREMİ VE YÜZLERCE İSPATA EKLENEN YENİLERİ

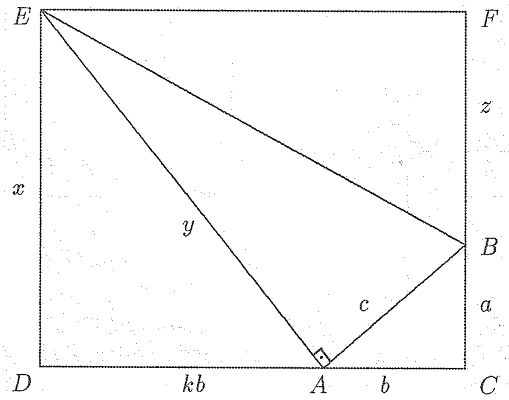
Nurhayat İspir

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06100-ANKARA

Bir çoğumuz için, Pisagor Teoremi ile tanışıklığımız geometri kavramlarını ilk öğrendiğimiz yıllarda başlar. Bilindiği gibi, bir dik üçgenin kenarlarının uzunlukları a, b ve hipotenüsünün uzunluğu c ise, bu durumda a, b, c sayıları arasında $a^2+b^2=c^2$ bağıntısı vardır. Teoremin ispatı, yüzlerce yıldır matematikseverleri meşgul etmiş, yüzlerce farklı ispatı yapılmıştır. Hatta, E. S. Loomis ([5], 1968) Pisagor Teoreminin ispatlarını toplayarak oluşturduğu "The Pythagorean Proposition" isimli kitabında tam **370** farklı ispat olduğunu iddia eder ([5], sayfa 269) ve ispatların henüz son bulmadığını söyler. Günümüzde Pisagor Teoremi ile ilgili çalışmalar ve ispatlar Loomis 'in sözünü doğrular niteliktedir. Bu yazımızda, son zamanlarda L. Hoehn ([4], 1997) tarafından yapılan oldukça yalın ve çekici ispatlardan bazılarını sizlere sunmak istiyoruz.

İlk olarak, Şekil 1 'de gösterilen $EDCF$ dikdörtgenini dikkate alalım. Bu CD kenarı üzerinde bir A noktası ve CF kenarı üzerinde bir B noktasını $E\hat{A}B$ bir dik açı olacak şekilde, işaretleyelim. Elde ettiğimiz ABC dik üçgeninin kenarlarını a, b, c ile gösterelim.

Şekil 1



AD kenarı b 'nin bir k katı olsun. Dikkat edilirse, $\Delta ABC \cong \Delta EAD$ olup,

$$\frac{a}{kb}=\frac{b}{x}=\frac{c}{y}$$

'dir. Buradan,

$$x=\frac{kb^2}{a},\quad y=\frac{kbc}{a},$$

ve böylece

$$z=x-a=\frac{kb^2-a^2}{a}$$

elde edilir. $EDCF$ dikdörtgeninin alanı bir taraftan $(kb+b)x$ olarak diğer taraftan EDA, EAB, ABC ve EFB üçgenlerinin alanları toplamı olarak iki farklı şekilde hesaplanabilir. Yani

$EDCF$ dikdörtgeninin alanı $=\Delta EDA$ alanı $+\Delta EAB$ alanı $+\Delta ABC$ alanı $+\Delta EFB$ alanı

veya

$$(kb+b)x=\frac{1}{2}kbx+\frac{1}{2}cy+\frac{1}{2}ba+\frac{1}{2}(kb+b)z$$

'dir. Bu denklemin her iki yanını 2 ile çarpar ve x, y, z 'nin değerlerini yerine yazarsak, sadeleştirme işlemlerinden sonra

$$kb^3 = kbc^2 - ka^2b \quad \text{veya} \quad b^3 = bc^2 - a^2b$$

denklemlerini ya da kısaca

$$b^2 = c^2 - a^2$$

denklemini elde ederiz. Bu durumda Pisagor Teoreminin ispatlarından biri gerçeklenmiş olur.

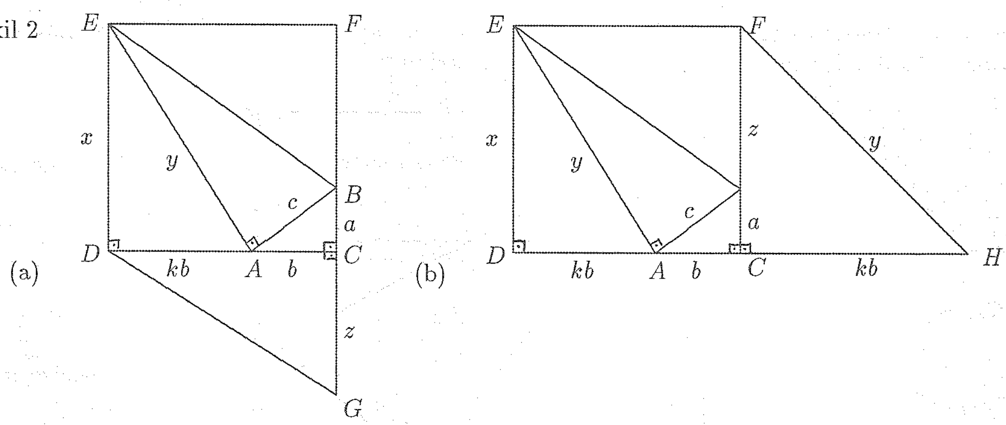
Şimdi Şekil 1 'i biraz değiştirelim. Bunun için EFB üçgenini şekildeki kareden ayıralım ve tekrar DC kenarına ekleyelim (Şekil 2a). Böylece EFB ve DCG benzer üçgenler olup, $EDGB$ paralelkenarının alanı farklı iki biçimde aynı $CDEF$ dikdörtgeninde olduğu gibi hesaplanabilir ve yine

$$b^2 = c^2 - a^2$$

bulunur.

Benzer biçimde Şekil 1 yeniden değiştirilerek farklı bir paralelkenar elde edilebilir. Bunun için Şekil 1 'deki dikdörtgenden EDA üçgenini çıkarıp CF kenarına ekleyelim (Şekil 2b). Burada $\Delta EDA \cong \Delta FCH$ olup $HAEF$ paralelkenarının hesabı bize yine Pisagor Teoreminin bir diğer ispatını verir.

Şekil 2



Aslında Şekil 1 'de EFB üçgenini kaldırdığımızda elde edilen $EDCB$ yamuğunun (Şekil 3a) alanı hesaplanarak da Pisagor Teoremi ispatlanabilir. Gerçekten, çıkarılan EFB üçgenin alanı

$$\frac{1}{2}(kb + b)\left(\frac{kb^2 - a^2}{a}\right)$$

olduğundan bu miktar Şekil 1 'deki dikdörtgenin alanı için verilen ilk denklemin her iki yanından çıkarılabilir. Gerekli sadeleştirme işlemleri yapıldığında aşinası olduğumuz $c^2 = a^2 + b^2$ denklemi elde edilir.

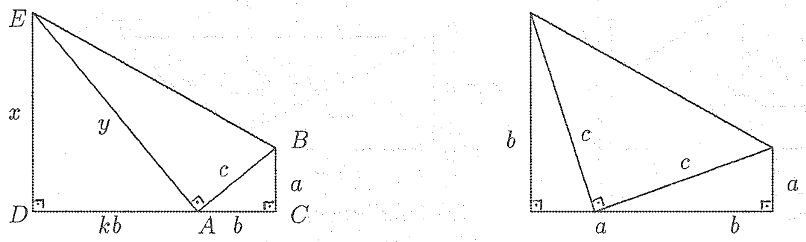
Dikkat edersek bu sonuçlar k 'nın genel bir değeri için sağlanmaktadır. Bununla birlikte, pek çok kayda değer ispat k 'nın özel değerleri için ele alınmıştır. Bu noktada, Başkan James Abram Garfield'ın ispatından bahsetmeden geçemeyeceğiz [2]. Başkan J. A. Garfield, Pisagor Teoreminin ispatı ile uğraşan yüzlerce amatörden biridir. Ne yazık ki, 1881 'de Amerika başkanı seçildikten dört ay sonra iş isteğini geri çevirdiği bir kişi tarafından Washington, D.C. tren istasyonunda vurulmuştur.

Eğer $k = a/b$ alınırsa, bu durumda Şekil 3a Başkan Garfield 'in ispatına indirgenir (Şekil 3b). Açık olarak, $kb = a$ olması durumunda

$$x = \frac{kb^2}{a} = b \quad \text{ve} \quad y = \frac{kbc}{a} = c$$

olup Şekil 3b 'deki yamuğun alanı, üçgenlerin alanları toplamı olduğundan $\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{ab}{2}$ eşitliği $a^2 + b^2 = c^2$ sonucunu verir.

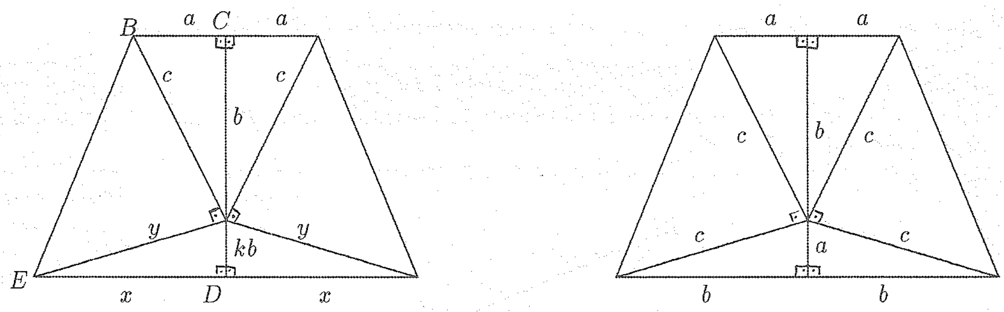
Şekil 3



(a) Garfield 'in ispatının genelleştirilmesi (b) Başkan Garfield 'in ispatı

Şekil 3a 'daki $EDCB$ yamuğu ve kopyası bir ikiz kenar yamuk (Şekil 4a) verecek şekilde düzenlenirse, bir lise öğrencisi olan Jamie deLemos [1] 'un 1995 yılında yapmış olduğu ispatın (Şekil 4b) bir genelleştirilmesi elde edilir.

Şekil 4



(a) deLemos 'un ispatının genelleştirmesi (b) deLemos 'un ispatı: $k = \frac{a}{b}$

Eğer $k = a/(c-a)$ alınırsa, Şekil 1 'deki dikdörtgen Şekil 5a 'da gösterilen dikdörtgene indirgenir. Burada $\Delta EAB \cong \Delta EFB$ 'dir ve

$$x = \frac{kb^2}{a} = \frac{a}{c-a}\frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{c-a}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, dikdörtgenin karşılıklı kenarları dikkate alındığında $x = c + a$ eşitliğinden

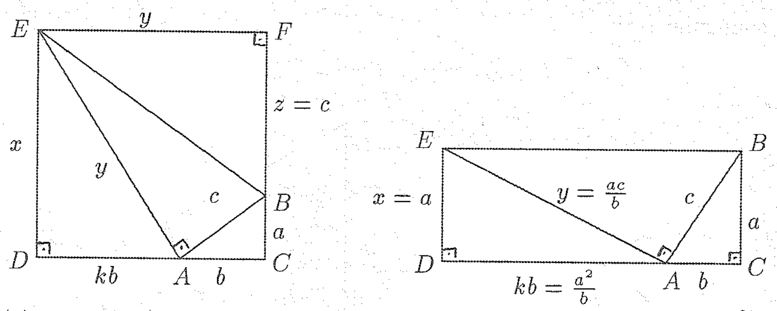
$$\frac{b^2}{c-a} = c + a$$

ve böylece

$$b^2 = c^2 - a^2$$

sonucu bulunur. Bu ispat ise Hoehn 'nin 1995 'de yaptığı ispatla eşdeğerdir [5].

Şekil 5



(a) Hoehn 'nin ispatı: $k = \frac{a}{c-a}$ (b) Dikdörtgensel ispat: $k = \frac{a^2}{b^2}$

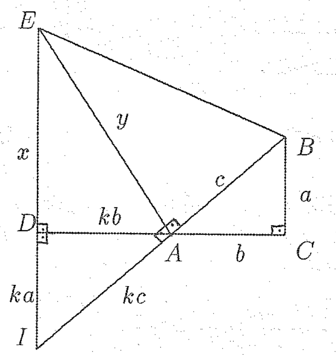
Eğer $k = a^2/b^2$ alınırsa Şekil 3a 'daki $EDCB$ yamuğu, Şekil 5b 'de gösterilen $EDCB$ dikdörtgenine indirgenir. Bu halde

$$x = \frac{kb^2}{a} = \frac{a^2}{b^2}\frac{b^2}{a^2} = a, \quad y = \frac{kbc}{a} = \frac{a^2}{b^2}\frac{bc}{a} = \frac{ac}{b} \quad \text{ve} \quad kb = \frac{a^2}{b^2}b = \frac{a^2}{b}$$

'dir.

Başka bir ispat vermek amacı ile Şekil 3a 'daki $EDCB$ yamuğu biraz daha değiştirilebilir. Bunun için BA kenarı ile ED kenarı bir I noktasında birleştirildiğinde ABC üçgeni ile benzer olan bir AID üçgeni elde edilir (Şekil 6):

Şekil 6



EIB üçgeninin alanı iki farklı şekilde, yani

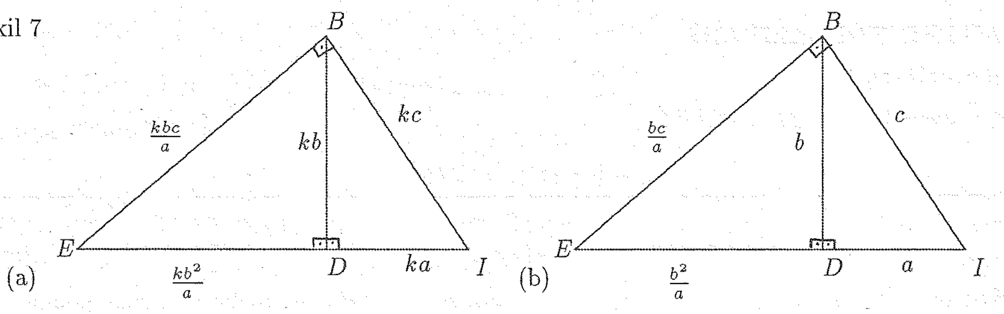
ΔEIB 'nin alanı = ΔEIA 'nın alanı $+\Delta EAB$ 'nin alanı

denklemi ile hesaplanabilir. $x = kb^2/a$, $y = kbc/a$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\frac{1}{2}(kc + c)\left(\frac{kbc}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{kb^2}{a} + ka\right)kb + \frac{1}{2}\left(\frac{kbc}{a}\right)c$$

denklemi bulunur. Gerekli sadeleştirme işlemleri sonucunda bildiğimiz $c^2 = b^2 + a^2$ denklemine ulaşırız. Dikkat edilirse, ispat sırasında ABC üçgenine gerek duyulmadı. Aslında EAB üçgenine de gerek yoktur. O halde Şekil 6, Şekil 7a 'ya indirgenebilir. Fakat Şekil 7a 'da görülen k çarpanı keyfi bir sayıdır. Bu nedenle Şekil 7a, Şekil 7b 'ye benzer olan herhangi bir şekle indirgenebilir.

Şekil 7



Açık olarak, Şekil 7b 'deki EIB üçgeninin alanı

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a}+a\right)b = \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}\right)c$$

olup, bu denklem $c^2 = b^2 + a^2$ denklemidir. Böylece Pisagor teoreminin ispatı için Şekil 7b en genel örneği sergiler.

Sonuç olarak,

1. Bütün ispatlar bir anlamda Şekil 7b 'ye indirgendiğinden bu makale bir tek ispat mı içermektedir?

2. Diğer taraftan, 1, 2a, 2b, 3a, 4a ve 6 şekilleri k 'nın genel değerlerini içerdiğinden ve k keyfi bir reel sayı olarak kabul edildiğinden, bu şekiller Pisagor Teoreminin farklı sonsuz sayıda ispatlarının bir dizisini mi gösterir?

Ne dersiniz, henüz son noktanın konmadığı yüzlerce ispat matematiksel düşüncenin zengin havuzunda ilginç yorumları ile bizleri mi bekliyor?

KAYNAKLAR

[1] J. deLemos, "Reader Reflections. The Pythagorean Theorem" Mathematics Teacher 88 (January, 1995), 79.

[2] M. Graham, "Events in the History of American Mathematics: President Garfield and the Pythagorian Theorem" Math. Teacher 69 (December 1976), 686-687.

[3] L. Hoehn, "A New Proof of the Pythagorean Theorem" Math. Teacher 88 (February 1995): 168.

[4] L. Hoehn, "The Pythagorean Theorem: An Infinite Number of Proofs?" Math. Teacher, Vol. 90, No. 6, (September 1997), 438-441.

[5] E. S. Loomis, "The Pythagorean Proposition" Washington, D.C.: National Council of Mathematics, 1968.