

## GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

Mehmet Şahin

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Tandoğan , 06100-ANKARA

e-posta: sahinm@science.ankara.edu.tr

$\Delta$   
ABC üçgeninde R: çevrel çember yarıçapı, r: içteğet çember yarıçapı, s: yarı çevre, F: alan, a, b, c: üçgenin BC, AC, AB kenarlarının uzunlukları,  $h_a, h_b, h_c$ : üçgenin yükseklikleri,  $m_a, m_b, m_c$ : üçgenin kenarortayları,  $r_a, r_b, r_c$ : üçgenin dışteğet çemberlerinin yarıçapları,  $w_a, w_b, w_c$ : üçgenin iç açkırtaylarını gösteriyor.

$\Delta$   
Teorem 1. ABC 'de

$$9r \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

Kanıt: Eşitsizliğin sol yanı [1], (1.1) 'de gösterilmiştir. Diğer yanı kanıtlayalım.  $\forall x, y, z$  pozitif reel sayıları için  $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$  eşitsizliğini kullanacağız.  $p = m_a + m_b + m_c$  diyelim.

$$p^2 = (m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3 \cdot (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \quad (1)$$

$\Delta$   
olur. ABC 'de

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

olduğu biliniyor. Bunlar taraf tarafa toplanarak  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$  bulunur. Bu (1) 'de yerine yazılırsa  $p^2 \leq 3 \cdot \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$  'dir. [2] (35) 'den

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2 \quad (2)$$

olup  $p^2 \leq \frac{9}{4} \cdot 9R^2 \Rightarrow p \leq \frac{9R}{2}$  bulunur. ABC eşkenar üçgen ise,  $9r = m_a + m_b + m_c = \frac{9R}{2}$  'dir.

$\Delta$   
Teorem 2. ABC 'de

$$3^{n+1} \cdot r^n \leq r_a^n + r_b^n + r_c^n \leq \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul, üçgenin eşkenar ve  $n = 1$  olmasıdır ( $n \in \mathbb{N}^+$ ).

Kanıt:  $p = r_a^n + r_b^n + r_c^n$  diyelim.  $r_a = \frac{F}{s-a}, r_b = \frac{F}{s-b}$  ve  $r_c = \frac{F}{s-c}$  olduğundan

$$p = \frac{F^n}{(s-a)^n} + \frac{F^n}{(s-b)^n} + \frac{F^n}{(s-c)^n}$$

ve aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$p \geq 3 \cdot F^n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{[(s-a)(s-b)(s-c)]^n}}, \quad (3)$$

$$\frac{s}{3} = \frac{3s-2s}{3} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}} \geq \frac{3}{s} \quad (4)$$

olup (4) eşitsizliği (3) 'de kullanılırsa  $p \geq 3 \cdot F^n \cdot \left(\frac{3}{s}\right)^n$  ve  $F=r \cdot s$  olduğundan

$p \geq 3 \cdot r^n \cdot s^n \cdot \frac{3^n}{s^n} \Rightarrow p \geq 3^{n+1} \cdot r^n$  bulunur. Eşitsizliğin sağ tarafı için  $x = \frac{F}{s-a}$ ,  $y = \frac{F}{s-b}$ ,  $z = \frac{F}{s-c}$  olmak üzere  $x^n + y^n + z^n \leq (x+y+z)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  ( $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ) eşitsizliğini kullanacağız.

$$p = r_a^n + r_b^n + r_c^n \leq (r_a + r_b + r_c)^n$$

ve  $r_a + r_b + r_c = r + 4R$  olup  $2r \leq R$  (Euler eşitsizliği) kullanılırsa

$$p \leq (r + 4R)^n \leq \left(\frac{R}{2} + 4R\right)^n \Rightarrow p \leq \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

bulunur.

**Sonuç 1:**  $\triangle ABC$  üçgeninde

$$3^{n+1} \cdot r^n \leq h_a^n + h_b^n + h_c^n \leq \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul, üçgenin eşkenar ve  $n = 1$  olmasıdır ( $n \in \mathbb{N}^+$ ).

**Kanıt:** Eşitsizliğin sağ yan  $h_a \leq m_a$ ,  $h_b \leq m_b$ ,  $h_c \leq m_c$  eşitsizliğinden açıktır. Sol yan aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği ve  $2F = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$ ,  $F = r \cdot s$  eşitlikleri kullanılarak gösterilebilir.

**Sonuç 2:**  $\triangle ABC$  üçgeninde

$$3^{n+1} \cdot r^n \leq w_a^n + w_b^n + w_c^n \leq \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul, üçgenin eşkenar ve  $n = 1$  olmasıdır ( $n \in \mathbb{N}^+$ ).

**Kanıt:** Eşitsizliğin sol yan  $h_a \leq w_a$ ,  $h_b \leq w_b$ ,  $h_c \leq w_c$  eşitsizliklerinden açıktır. Sağ yan ise  $w_a \leq m_a$ ,  $w_b \leq m_b$ ,  $w_c \leq m_c$  eşitsizliklerinden ve Teorem 1 'den açıktır.

**Problem:** Dar açılı bir  $\triangle ABC$  üçgeninin  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  yükseklikleri çiziliyor.

(a)  $A'B'C'$  üçgeninin kenar uzunluklarının  $a' = a \cos A$ ,  $b' = b \cos B$ ,  $c' = c \cos C$  olduğunu gösteriniz.

(b)  $\Delta ABC$  'nin alanı  $F$ ,  $\Delta A'B'C'$  'nin alanı  $F_h$  ise,  $\frac{F_h}{F} = 2 \cos A \cos B \cos C$  olduğunu gösteriniz.

(c)  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$  olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(a)  $\Delta AB'B$  ve  $\Delta AA'B$  dik üçgenleri aynı hipotenüse sahip olduklarından  $ABA'B'$  bir kirişler dörtgenidir. Aynı şekilde  $\Delta CA'A'C'$  dörtgeni bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla  $m(\widehat{B'A'C'}) = m(\widehat{BAC})$  'dir.

Aynı şekilde,  $m(\widehat{CA'B'}) = m(\widehat{BAC})$  olup buradan

$$m(\widehat{B'A'C'}) = 180^\circ - 2m(\widehat{BAC}) \text{ 'dir.}$$

Aynı düşünceyle  $m(\widehat{A'B'C'}) = 180^\circ - 2m(\widehat{ABC})$  ve

$$m(\widehat{A'C'B'}) = 180^\circ - 2m(\widehat{ACB}) \text{ olur.}$$

$|B'C'| = c'$ ,  $|A'C'| = b'$ ,  $|A'B'| = a'$  olmak üzere  $\Delta A'B'C'$  üçgeninde Sinüs Teoremine göre

$$\frac{c'}{\sin C} = \frac{|B'C'|}{\sin(\widehat{B'A'C'})}$$

ve  $\Delta BB'C$  'de  $|B'C| = a \cdot \cos C$  olduğundan

$$\frac{c'}{\sin C} = \frac{a \cdot \cos C}{\sin A} \Rightarrow c' = \frac{a \cdot \sin C \cdot \cos C}{\sin A} \Rightarrow c' = \frac{a \cdot \sin 2C}{2 \sin A}$$

$\Delta ABC$  'de Sinüs Teoreminden  $\frac{a}{\sin A} = 2R$  olduğundan  $c' = R \cdot \sin 2C$  bulunur. Benzer şekilde

$$b' = R \cdot \sin 2B, a' = R \cdot \sin 2A \quad (5)$$

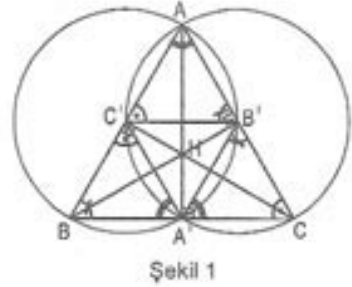
elde edilir.

$\Delta ABC$  'nin çevrel çemberinin merkezi  $O$  ve  $O$  'nun  $[BC]$  'ye uzaklığı  $P_a$ ,  $[AC]$  'ye uzaklığı  $P_b$ ,  $[AB]$  'ye uzaklığı  $P_c$  olsun.

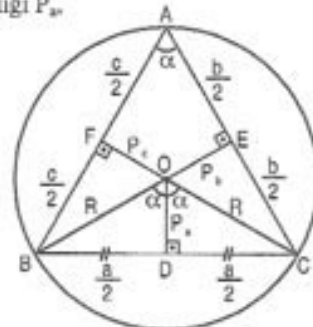
$m(\widehat{COB}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC})$  olduğundan  $\Delta OBC$  'de alan bağıntısından

$$m(\Delta OBC) = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha = \frac{a \cdot P_a}{2}$$

'den  $R^2 \sin 2\alpha = a \cdot P_a$  ve  $\Delta ODC$  'de  $\frac{P_a}{R} = \cos A$  ve



Şekil 1



Şekil 2

$\alpha = \hat{A}$  olduğundan  $R^2 \cdot \sin 2A = a \cdot \cos A$  ise, (5) 'de  $R \cdot \sin 2A = a \cdot \cos A$  yazılınca,  $a' = a \cdot \cos A$  bulunur. Benzer şekilde  $b' = b \cdot \cos B$ ,  $c' = c \cdot \cos C$  elde edilir.

$$(b) \quad A(A'B'C') = F_h \text{ idi. } F_h = \frac{b'c' \cdot \sin(B'C'A')}{2} = \frac{b' \cdot c' \cdot \sin(180^\circ - 2A)}{2}$$

$$F_h = \frac{b \cos B \cdot c \cos C \cdot \sin 2A}{2}$$

$$= \frac{bc \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot 2 \sin A \cdot \cos A}{2}$$

$$F_h = \underbrace{bc \sin A}_{2F} \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$= 2F \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

ve buradan

$$\frac{F_h}{F} = 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

bulunur.

$\Delta$   
Not: ABC 'de Kosinüs Teoreminden

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

olduğundan

$$\frac{F_h}{F} = 2 \cdot \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(2ab)(2ac)(2bc)},$$

$$\frac{F_h}{F} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2b^2c^2} \quad (6)$$

'dir.

(c) Dönüşüm formülleri yardımıyla

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$  olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi  $\sin \frac{A}{2}$ ,  $\sin \frac{B}{2}$  ve  $\sin \frac{C}{2}$  'nin kenarlar cinsinden değerlerini bulalım. İki kat formülüne göre

$\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$  veya  $2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$  ve  $\Delta$  ABC üçgeninde  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  olduğundan

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} \Rightarrow \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$$

$$a + b + c = 2s \text{ olduğundan } \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4bc} \text{ ve } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \text{ 'dir.}$$

Benzer şekilde

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \text{ ve } \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 1 + 4 \cdot \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \\ &= 1 + 4 \cdot \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

$\Delta$  ABC üçgeninde  $abc = 4RF$  ve  $F = s \cdot r$  ve  $F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$  olduğundan

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \cdot \frac{\frac{F^2}{s}}{4RF} = 1 + \frac{r^2 \cdot s^2}{R \cdot F \cdot s^2} = 1 + \frac{r}{R}$$

bulunur.

**Sonuçlar**

(a)  $A'B'C'$  üçgeninin çevresi  $\zeta'$  ve  $\zeta' \leq s$  'dir.

(b)  $\text{Alan}(\Delta ABC) = F$ ,  $\text{Alan}(A'B'C') = F'$  ise,  $\frac{F'}{F} \leq \frac{1}{4}$  'tür.

(c)  $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$  'dir.

**Kanıt:** (a) Şekil 2 'den

$$\begin{aligned} \text{Alan}(\Delta ABC) = F &= \frac{a \cdot P_a}{2} + \frac{b \cdot P_b}{2} + \frac{c \cdot P_c}{2} = \frac{a \cdot R \cdot \cos A}{2} + \frac{b \cdot R \cdot \cos B}{2} + \frac{c \cdot R \cdot \cos C}{2} \\ &= \frac{R}{2} \cdot (a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C), \end{aligned}$$

$$F = \frac{R}{2} \cdot (a+b+c) \text{ ve } r \cdot s = \frac{R}{2} \cdot (2s), \zeta' = 2s' = \frac{2rs}{R} \text{ ve } 2r \leq R \text{ olduğundan } \zeta' \leq s \text{ bulunur.}$$

(b) Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğine göre

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} \text{ olup } \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{27} \left(1 + \frac{r}{R}\right)^3 \text{ 'dir.}$$

$2r \leq R$  olduğundan

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{27} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ 'dir.}$$

Böylece,  $\frac{F'}{F} = 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$  ve  $\frac{F'}{F} \leq \frac{1}{4}$  bulunur.  $\Delta$  ABC üçgeni eşkenar üçgen ise  $\frac{F'}{F} = \frac{1}{4}$  'tir.

(c)  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$  ve  $2r \leq R$  olduğundan

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ 'dir.}$$

**Teorem 3.**  $\Delta$  ABC üçgeninde yükseklik ayaklarının oluşturduğu üçgenin (ortik üçgen) alanı  $F_h$ , açıortayların karşı kenarları kestiği noktaların birleştirilmesiyle oluşan üçgenin alanı  $F_w$ , kenarortayların karşı kestiği noktaların birleştirilmesiyle oluşan üçgenin alanı  $F_m$  ise,

$$\left(\frac{2r}{R}\right)^6 \cdot F_h \leq F_w \leq F_m \quad (7)$$

'dir. Üçgen eşkenar ise eşitlik vardır.

**Çözüm:**  $\Delta$  A(ABC) = F ve [3] 'den

$$\frac{F_w}{F} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (8)$$

'dir. (6) 'dan

$$\frac{F_h}{F} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2b^2c^2}$$

olup son iki eşitlik taraf tarafa oranlarsa,

$$\frac{F_w}{F_h} = \frac{8a^3b^3c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \quad (9)$$

olur. Aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2) \geq 3 \sqrt[3]{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

olup düzenlenirse,

$$\frac{1}{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \geq \left(\frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^3$$

olur. [2] (35) 'den  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$  olduğu kullanılırsa,

$$\frac{1}{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \geq \left(\frac{3}{9R^2}\right)^3 = \frac{1}{27R^6} \quad (10)$$

olur. [5] 'den  $(b+c)(c+a)(a+b) = 2S(s^2 + r^2 + 2Rr)$  olup [6] 'dan  $2S \leq 3\sqrt{3}R$ ,  $2r \leq R$  eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\frac{1}{(b+c)(c+a)(a+b)} \geq \frac{1}{24\sqrt{3}R^3} \quad (11)$$

elde edilir. (10) ve (11) eşitsizlikleri ve  $abc = 4RF$  eşitliği (9) 'da kullanılırsa,

$$\frac{F_w}{F_h} \geq \frac{8 \cdot (4RF)^3}{(27R^6)(24\sqrt{3}R^3)} = \frac{2^9 \cdot R^3 \cdot F^3}{3^4 \cdot R^6 \cdot 2^3 \cdot R^3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2^6 \cdot F^3}{3^4 \cdot \sqrt{3} \cdot R^6}$$

$F = r \cdot s$  eşitliği ve [6] 'dan  $s^2 \geq 27r^2$  eşitsizliği kullanılırsa,

$$\frac{F_w}{F_h} \geq \frac{2^6 \cdot r^3 \cdot s^3}{3^4 \cdot \sqrt{3} \cdot R^6} \geq \frac{2^6 \cdot r^3 \cdot (3\sqrt{3}r)^3}{3^4 \cdot \sqrt{3} \cdot R^6} = \frac{2^6 \cdot r^6}{R^6}, \quad \frac{F_w}{F_h} \geq \left(\frac{2r}{R}\right)^6 \text{ olup (7) eşitsizliğinin sol yanı kanıtlanmış oldu.}$$

Şimdi sağ yanı kanıtlayalım.  $\Delta ABC$  üçgeninde

$$\frac{F_m}{F} = \frac{1}{4} \quad (12)$$

olduğu açıktır. (8) ve (12) eşitlikleri taraf tarafa oranlanarak,

$$\frac{F_w}{F_m} = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (13)$$

elde edilir. [4] 'ten  $8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)$  olup  $\frac{F_w}{F_m} \leq 1$  ve  $F_w \leq F_m$  'dir. Böylece eşitsizliğin kanıtı tamamlanır.

#### KAYNAKLAR

- [1] Mehmet Şahin, Üçgenin elemanları arasındaki bazı eşitlik ve eşitsizlikler II, Matematik Dünyası, Cilt 9, Sayı 1, (2000), 11-15.
- [2] Murray S. Klamkin, Asymmetric triangle inequalities, Publications de la Faculté d'Électrotechnique de L'Université à Belgrade, No: 357 – No: 380, (1971), 33-44.
- [3] Mehmet Şahin ve İsmail Dedeoğlu, Geometri 1-2-3, (1996), Sayfa 197.
- [4] J. F. Rigby, A method of obtaining related triangle inequalities, with applications, Publications de la Faculté d'Électrotechnique de L'Université à Belgrade, No: 412 – No: 460, (1973), 217-226
- [5] Ji Chen, Xue – Zhi Yang, On Zirkzadeh inequality related to two triangles inscribed one in the other, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 4 (1993), 25-27.
- [6] O. Bottema et al. , Geometric Inequalities, Groningen, 1969.