## PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

**Uyarı:** Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 31 Ocak 2001 tarihine kadar gönderiniz.

## ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

**A.221.** Terimleri tamsayılar olan bir sonsuz aritmetik dizinin bir teriminin tam küp olduğunu varsayalım. Bu dizinin terimleri içinde sonsuz çoklukta tam küpler bulunduğunu kanıtlayınız.

**A.222.** İstenilen dört tanesinin bir ortak noktası bulunan beş çemberin beşinin de bir noktadan geçtiğini kanıtlayınız.

**A.223.** Düzlem üzerinde alınmış $A$, $B$, $C$, $D$ noktaları öyledir ki, herhangi $P$ noktası için $|PA|+|PD| \geq |PB|+PC|$ eşitsizliği sağlanmaktadır. $B$ ve $C$ noktalarının $AD$ doğru parçası üzerinde bulunduklarını ve $|AB| = |CD|$ olduğunu gösteriniz.

**A.224.** Negatif olmayan her $a$ ve $b$ sayıları için

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

**A.225.** $ABC$ üçgeninin $[AD]$ yüksekliği üzerinde bir $P$ noktası alınıyor, $BP$ ve $CP$ doğrularının $[AC]$ ve $[AB]$ ile kesişim noktaları sırasıyla $E$ ve $F$ ile gösteriliyor. $[DA$ 'nın, $FDE$ açısına ait açıortay olduğunu ispatlayınız.

## YARIŞMA PROBLEMLERİ

**Y.221.** Her $i = 1, 2, 3, ..., n$ için $x_i \geq 0$ ve $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = 10$ bağıntılarını sağlayan $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ sayıları için $S = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$ toplamının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

**Y.222.** Her $n \in \mathbb{N}$ için sistemin tüm reel çözümlerini bulunuz:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = 3$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 = 3^2$$
$$...$$
$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + ... + x_n^n = 3^n$$

**Y.223.** Her $\alpha \leq 1$ ve $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n > 0$ sayıları için

$$(1 + x_1 + x_2 + ... + x_n)^\alpha \leq 1 + 1^{\alpha-1}x_1^\alpha + 2^{\alpha-1}x_2^\alpha + ... + n^{\alpha-1}x_n^\alpha$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

**Y.224.** Uzayda uzunlukları eşit olan 3 doğru parçası rasgele yerleştirilmiştir. Bu parçaların ortogonal (dikey) izdüşümlerinin eşit olduğu bir düzlemin varlığını gösteriniz.

**Y.225.** Biçimini değiştirmeyen bir $ABC$ üçgeninin $A$ köşesi sabit olup $B$ köşesi bir çember üzerinde hareket etmektedir. $C$ köşesinin geometrik yerinin bir çember olduğunu ispatlayınız.

## ÇÖZÜMLER

**A.211.** Her biri 1 veya $-1$ 'e eşit olan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayıları için $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$ eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir. $n$ sayısının 4 'e bölündüğünü kanıtlayınız.

**Çözüm.** Her $i$ için $a_i = \pm 1$ olduğundan, her $i, j = 1, 2, ..., n$ için $a_ia_j = \pm 1$ olacaktır. Dolayısıyla, $(a_1a_2).(a_2a_3)...(a_na_1) = \pm 1$ olmalıdır. Öte yandan, $(a_1a_2).(a_2a_3)...(a_na_1) = (a_1a_2...a_n)^2 > 0$ olacağından, $(a_1a_2).(a_2a_3)...(a_na_1) = 1$ olduğunu söyleyebiliriz. Öyleyse, $a_1a_2$, $a_2a_3$, ..., $a_{n-1}a_n$, $a_na_1$ sayıları içerisindeki negatif sayılar sayısı (ona $m$ diyelim ) çift olmak zorundadır: $m = 2k$. Fakat, $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$ olduğundan; $a_1a_2$, $a_2a_3$, ... , $a_{n-1}a_n$, $a_na_1$ sayıları içindeki pozitif sayılar sayısı negatif sayılar sayısına eşit olmalıdır. Dolayısıyla, $n = 2m = 4k$ ve $n$, 4 ile bölünmek zorundadır.

**A.212.** 1, 2, 3, ... , 80, 81 sayılarının tümü, birim karelere ayrılmış $9 \times 9$ karesinin hanelerine rasgele yerleştiriliyor. Sayılar nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, ortak bir kenarı bulunan ve içlerine yerleştirilmiş sayıların farkı en az 6 olan en az iki hanenin bulunduğunu ispatlayınız.

**Çözüm.** Ortak kenarları bulunan karelere komşu kareler diyelim ve 1 ile 81 'in bulunduğu kareleri birleştiren "komşu kareler zincirine" bakalım. (Şekilde bu tür "zincirler" 'den ikisi taranmıştır.)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | x | x | x | x | x | x | x | 81 |
| | x | | | | | | | x |
| | x | | | | x | x | x | x |
| | x | | | | x | | | |
| | x | | | | x | | | |
| | 1 | x | x | x | x | | | |
| | | | | | | | | |

İki durum sözkonusudur:

(I) 1 ve 81 en uzak karşı köşelerdedir.

(II) 1 ve 81 'den en az biri en uzak karşı köşelerde değildir.

I. durumda karşı köşeleri birleştiren herhangi iki "zincire" bakalım. 17 haneden ibaret olan bu zincirdeki sayılara $a_1, a_2, ..., a_{17}$ ($a_1 = 1$, $a_{17} = 81$) ve $b_1, b_2, ..., b_{17}$ ($b_1 = 1$, $b_{17} = 81$) diyelim.

$$80 = 81 - 1 = (81 - a_{16}) + (a_{16} - a_{15}) + ... + (a_3 - a_2) + (a_2 - 1), \qquad (1)$$

$$80 = 81 - 1 = (81 - b_{16}) + (b_{16} - b_{15}) + ... + (b_3 - b_2) + (b_2 - 1) \qquad (2)$$

eşitliklerine bakalım. Eğer (1) toplamında tüm parantezler $\leq$ 5 ise, toplam 80 ve parantez sayısı 16 olduğundan, parantezlerin her biri 5 'e eşit olmalı, dolayısıyla, $\{a_2, a_3, ..., a_{15}, a_{16}\} = \{6, 11, 17, ..., 76\}$ olmalıdır. O halde (2) ifadesinde 5 'ten küçük parantez(ler) ve dolayısıyla, 5 'ten büyük parantez(ler) bulunacaktır.

II. durumda 1 ve 81 'i en fazla 16 hane içeren "zincirle" birleştirebiliriz. Bu hanelerde yazılan sayılara $c_1 = 1$, $c_2$, $c_3$, ..., $c_n = 81$ diyelim. Burada $n \leq 16$ olduğundan,

$$80 = 81 - 1 = (81 - c_{n-1}) + (c_{n-1} - c_{n-2}) + ... + (c_2 - 1)$$

eşitliğinde parantezler sayısı $\leq$ 15 ve dolayısıyla, en az bir parantez $\geq$ 6 olur.

**A.213.** $x + \frac{1}{x}$ bir tamsayı ise, her $n \in \mathbf{N}$ için $x^n + \frac{1}{x^n}$ sayısının da bir tamsayı olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.** Tümevarım uygulayalım. Her $k = 1, 2, ..., n-1, n$ için $x^k + \frac{1}{x^k}$ sayısının bir tamsayı olduğunu varsayarak, $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ 'in de tamsayı olduğunu gösterelim.

$x + \frac{1}{x}$ ve $x^n + \frac{1}{x^n}$ sayıları tam olduğundan onların çarpımı

$$(x + \tfrac{1}{x})(x^n + \tfrac{1}{x^n}) = (x^{n+1} + \tfrac{1}{x^{n+1}}) + (x^{n-1} + \tfrac{1}{x^{n-1}})$$

yine bir tamsayı olmalıdır. Öyleyse,

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = (x + \frac{1}{x})(x^n + \frac{1}{x^n}) - (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}})$$

sayısı da bir tamsayı olacaktır.

**A.214.** $x$ sayısının tam kısmını $[\![x]\!]$ ile gösterelim. $x + \frac{99}{x} = [\![x]\!] + \frac{99}{[\![x]\!]}$ denkleminin tam olmayan kökünün kesir kısmını bulunuz.

**Çözüm.** $(x - [\![x]\!])(1 - \frac{99}{x[\![x]\!]}) = (x + \frac{99}{x}) - ([\![x]\!] + \frac{99}{[\![x]\!]}) = 0$ eşitliğinden ve $x \neq [\![x]\!]$ koşulundan

$$1 - \frac{99}{x[\![x]\!]} = 0 \Leftrightarrow x.[\![x]\!] = 99$$

olur. $x = n + d$ ($n \in \mathbf{Z}$, $0 < d < 1$) dersek, $n(n+d) = 99$ elde ederiz. $n > 0$ ise, $n^2 < 99 < n(n+1)$ olmalıdır ki, bu mümkün değildir. $n < 0$ ise, $n(n+1) < 99 < n^2$ eşitsizliğinden $n = -10$ ve $n(n+d) = 99$, $n = -10$ eşitliklerinden de

$$-10(-10+d) = 99 \Rightarrow d = -\frac{99}{10} + 10 = 10 - 9,9 = 0,1$$

elde edilir. Böylece, denklemi sağlayan $x$ 'in kesir kısmı $d = 0,1$ ' dir.

**A.215.** Düzlemde aynı doğru üzerinde bulunmayan $A$, $B$, $C$ noktaları ile bir $k \in \mathbf{R}^+$ sayısı veriliyor. $|PA|^2 + |PB^2| + |PC|^2 = k$ şartını sağlayan $P$ noktalarının geometrik yerini bulunuz.

**Çözüm.** $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), P(x, y)$ olsun. Verilen şarttan,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = k$$

ya da

$$3[(x - \tfrac{x_1+x_2+x_3}{3})^2 + (y - \tfrac{y_1+y_2+y_3}{3})^2] + \tfrac{1}{3}[(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] = k.$$

$ABC$ üçgeninin ağırlık merkezi

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

olduğundan $|PG|^2 = \frac{1}{9}\left[3k - (a^2+b^2+c^2)\right]$ bulunur.

1. $3k < a^2+b^2+c^2$ ise, geometrik yer boş küme,

2. $3k = a^2+b^2+c^2$ ise, geometrik yer $G$ noktası,

3. $3k > a^2+b^2+c^2$ ise, geometrik yer $G$ merkezli ve $\left(\sqrt{3k-(a^2+b^2+c^2)}/3\right)$ yarıçaplı bir çemberdir.

**Y.211.** Doğal sayılar kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan 2001 altkümeye parçalanıp parçalanamayacağını belirleyiniz:

**(i)** Altkümeler ikişer ikişer ayrık ve hiç biri boş değildir.

**(ii)** Altkümelerin birleşimi tüm doğal sayılar kümesidir.

**(iii)** Bu altkümelerden herhangi 2000 tanesi seçilir ve bu 2000 kümeden birer tane eleman seçilip bu elemanların 2000-inci kuvvetleri alınarak elde edilen 2000 sayı çarpılırsa, bu çarpım, seçilmeyen kümenin elemanıdır. (Alp Şimşek; İzmir Fen Lisesi)

**Çözüm.** Böyle bir parçalanma mümkündür.

$a \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ ($p_1,p_2,...,p_k$ asal ; $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k \in \mathbb{N}$) ise, f(a)$=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k$ olarak tanımlayalım.

Altkümelerimiz $A_0$, $A_1$, ... , $A_{2000}$ şöyle tanımlansın: Her $a \in \mathbb{N}$ için

$$f(a) \equiv i \ (mod\ 2001) \ \Leftrightarrow \ a \in A_i$$

olsun. Yani her doğal sayı $a$ 'yı $f(a)$ 'nın 2001 modunda değeri olan indisli altkümeye koyalım. Bu altkümelerin ilk 2 şartı sağladığı açıktır. Öte yandan $f$ fonksiyonunun her $a,b,n \in \mathbb{N}$ için $f(ab) = f(a)+f(b)$ ve $f(a^n) = nf(a)$ şartlarını sağladığı açıktır. O halde, 3. şartta dışarıda bırakılan küme $A_i$ ise, $a_j \in A_j$ ; $j \in S_i = \{0,1,2,...,2000\} - \{i\}$ seçersek,

$$\begin{aligned} f(\Pi_{j\in S_i} a_j^{2000}) &= 2000.\textstyle\sum_{j\in S_i} f(a_j) \\ &\equiv 2000.\textstyle\sum_{j\in S_i} j \ \ (mod\ 2001) \\ &\equiv 2000.(\textstyle\sum_{k=0}^{2000} k - i) \ \ (mod\ 2001) \\ &\equiv 2000.(\frac{2001.2000}{2} - i) \ \ (mod\ 2001) \\ &\equiv -2000i \ \ (mod\ 2001); \end{aligned}$$

$$f(\Pi_{j\in S_i} a_j^{2000}) \equiv i \ \ (mod\ 2001)$$

olur. O halde, $\Pi_{j\in S_i} a_j^{2000} \in A_i$ olur. Yani 3. şart da sağlanır.

**Not:** Çözüm takip edilirse 2001 yerine herhangi tek sayı alabileceği görülür.

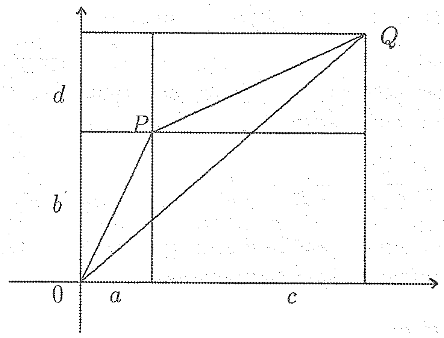
**Y.212.** $a$, $b$, $c$, $d$ pozitif reel sayılar ve $bc \geq ad$ ise,

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \leq b + \sqrt{(a+c)^2+d^2}$$

olduğunu gösteriniz. (M. Bumin Yenmez; İzmir Özel Yamanlar Lisesi)

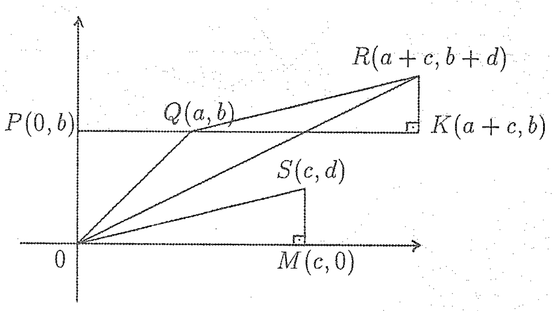
**Çözüm.** İlk başta sol tarafı gösterelim. Koordinat sisteminde $P(a,b)$, $Q(a+c,b+d)$ alalım. Üçgen eşitsizliğinden $OQ \leq OP+PQ$ olur. Böylece,

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ .$$

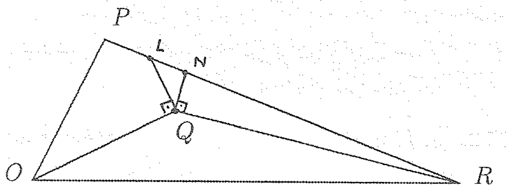



Şimdi sağ tarafa bakalım. Dik koordinat sisteminde $P=(0,b)$, $Q=(a,b)$, $R=(a+c,b+d)$, $S=(c,d)$, $M=(c,0)$ ve $K=(a+c,b)$ alalım. Şekilden görüldüğü gibi

$$\overset{\triangle}{OSM} \sim \overset{\triangle}{QRK} \ \Rightarrow \ S\hat{O}M = R\hat{Q}K\ .$$




$\frac{b}{a} \geq \frac{d}{c}$ olduğundan, $Q\hat{O}M > S\hat{O}M = R\hat{O}K$ ve burada $O\hat{Q}R < 180°$ olur. O halde $Q$ noktası $\overset{\triangle}{OPR}$ 'nin içindedir.




$Q$ noktasından $OQ$ 'ya çıkılan dikme ve $RQ$ 'ya çıkılan dikme $PR$ 'yi, sırasıyla $L$ ve $N$ noktalarında kessin. $\widehat{OQR} < 180°$ olduğundan, $\widehat{LQN} > 0°$ olur. Böylece $PL + PO \geq LO \geq OQ$ ve $NR > RQ$ 'dur. O halde, $OP + PL + LN + NR > OQ + QR$; yani $OP + PR > OQ + QR$ 'dir ki, bu $b + \sqrt{(a+c)^2 + d^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$ olduğunu gösterir.

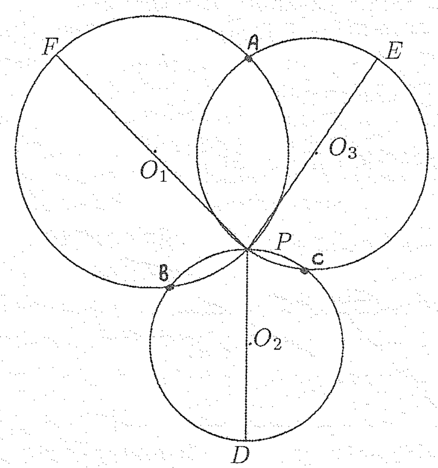
(**Çözen:** *Türkay Yolcu (Ankara)*).

**Y.213.** $P$, $ABC$ üçgeni içinde alınan bir nokta olmak üzere; $\overset{\triangle}{PAB}$, $\overset{\triangle}{PBC}$, $\overset{\triangle}{PCA}$ üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları, sırasıyla, $R_1$, $R_2$, $R_3$ olsun. Buna göre,

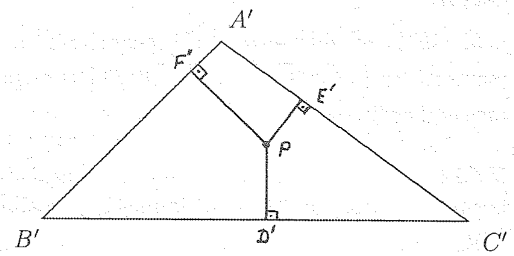
$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} \geq \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. (Ahmet Çetintaş; Ankara Samanyolu Lisesi)

**Çözüm.**




Sözü edilen üç çemberin $P$ 'den geçen çaplarının çemberi ikinci kez kestiği noktalar $D$, $E$, $F$ olsun. Buna göre $PE = 2R_3, PD = 2R_2, PF = 2R_1$ olacaktır. Şimdi $P$ noktasına göre düzlem üzerinde bir evirtim fonksiyonu tanımlayalım. $P$ noktası $C$ noktasını $PC$ doğrusu üzerinde $PC.PC' = 1$ olacak şekilde ($C$ 'ye yakın tarafta) bir $C'$ noktasına götürsün. Buna göre yukarıdaki şekli $P$ noktasına göre evirtirsek,




haline gelir. Bu şekilde $P$, $ABC$ üçgeninin içinde bir nokta ve $D'$, $E'$ ve $F'$, $P$ noktasının kenarlara olan dikme ayaklarıdır. Bu durumda Erdös-Mordell eşitsizliğine göre

$$PA' + PB' + PC' \geq 2(PD' + PE' + PF')$$

olacaktır.

$$PA.PA' = 1\ ,\ PB.PB' = 1\ ,\ PC.PC' = 1\ ,$$

$$PD.PD' = 1\ ,\ PE.PE' = 1\ ,\ PF.PF' = 1$$

olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki eşitsizliklerde bunları yerlerine yerleştirirsek,

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} \geq \frac{2}{PD} + \frac{2}{PE} + \frac{2}{PF}$$

$$= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

elde ederiz.

**Y.214.** Merkezi bir $A_1$ noktasında ve yarıçapı 1 olan dairenin içinde, $A_1$ 'den farklı, rasgele, $A_2$, $A_3$, ... , $A_{100}$ noktaları alınmıştır. $1 \leq k \leq 100$ olan her $k$ tamsayısı için $A_k$ 'dan $A_1$, $A_2$, ... , $A_{k-1}$, $A_{k+1}$, ... , $A_{100}$ noktalarına olan uzaklıklardan en küçüğü $a_k$ ile gösteriliyor. Bu durumda

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2 < 9$$

olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.** Merkezi $A_k$, $(k = 1, 2, ..., 100)$ noktasında ve yarıçapı $\frac{a_k}{2}$ olan daireye $D_k$ diyelim. $D_k$ 'ların birbiriyle kesişmediği açıktır. Öte yandan, $D_k$ 'ların hepsi merkezi $A_1$ 'de ve yarıçapı $1\frac{1}{2}$

olan dairenin içinde bulunurlar. Bundan dolayı, $D_k$ 'ların alanlar toplamı $1\frac{1}{2}$ yarıçaplı dairenin alanından küçük olacaktır:

$$\pi.((\frac{a_1}{2})^2 + (\frac{a_2}{2})^2 + \ldots + (\frac{a_{100}}{2})^2) < \pi(\frac{3}{2})^2 .$$

**Y.215.** Açıları arasında, $\hat{C} = 3\,\hat{B} = 9\,\hat{A}$ bağıntısı bulunan bir $ABC$ üçgeninde $a$, $b$, $c$ kenar uzunluklarını göstermek üzere, $bc + ca + ab$ ifadesinin, bu üçgene ait çevrel çemberin $R$ ile gösterilen yarıçapı cinsinden değerini bulunuz.

**Çözüm.** $A'$, $B'$, $C'$ : yükseklik ayaklarını; $H$ : ortosantrı, $O$ : çevrel çemberin merkezini göstersin.

$$\hat{A} = \frac{\pi}{13},\ \hat{B} = \frac{3\pi}{13},\ \hat{C} = \frac{9\pi}{13}$$

olup, $n$ doğal sayısı için $\cos\frac{n\pi}{13} = -\cos(13-n)\frac{\pi}{13}$ ve

$1 + \cos\frac{2\pi}{13} + \cos\frac{4\pi}{13} + \ldots + \cos\frac{22\pi}{13} + \cos\frac{24\pi}{13} = 0,$

$\cos\frac{2\pi}{13} + \ldots + \cos\frac{12\pi}{13} = \cos\frac{14\pi}{13} + \ldots + \cos\frac{24\pi}{13} = -\frac{1}{2},$

'dir.

$$x = \cos\frac{2\pi}{13} + \cos\frac{6\pi}{13} + \cos\frac{8\pi}{13},$$

$$y = \cos\frac{4\pi}{13} + \cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{12\pi}{13}$$

kabul edildiğinde $\cos A + \cos B + \cos C = -y$ ve $4x^2 + 2x - 3 = 0$ bulunur. Buradan

$$x = \frac{\sqrt{13} - 1}{4},\quad y = \frac{-\sqrt{13} - 1}{4}$$

elde edilir. ($x + y = -\frac{1}{2}$ ve $xy = -\frac{3}{4}$ 'tür.)

$$|HA'| = |2R\cos B\cos C| = -2R\cos B\cos C$$
$$= -R[\cos(B-C) + \cos(B+C)],$$
$$|HB'| = -R[\cos(C-A) + \cos(C+A)],$$
$$|HC'| = R[\cos(A-B) + \cos(A+B)],$$
$$|HA'| + |HB'| - |HC'| = R(-x-y) = \frac{R}{2}$$

bulunur.

$$|OI|^2 + |OH|^2 = R^2 - 2Rr + 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2,$$
$$2Rr = 8R^2 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$
$$2Rr = 2R^2(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$$
$$= 2R^2(-y-1),$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$
$$= 4R^2(3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)$$
$$= 2R^2(3 - x)$$

ve buradan

$$|OI|^2 + |OH|^2 = R^2(6 + 2x + 2y) = 5R^2$$

bulunur ve

$$bc + ca + ab$$
$$= 4R^2(\sin B\sin C + \sin C\sin A + \sin A\sin B)$$
$$= 2R^2[\cos(B-C) - \cos(B+C) + \cos(C-A) - \cos(C+A)\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$
$$= 2R^2(x-y) = R^2\sqrt{13}$$

elde edilir.

(**Çözen:** *Naim Uygun (Beşiktaş-İstanbul)* ).

---