BEŞİNCİ ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI İKİNCİ SEÇME SINAVI

Halil İ. Karakaş-İlham Aliyev-Fikri Gökdal

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Beşinci Antalya Matematik Olimpiyadının ikinci seçme sınavı 19 Mayıs 2000 Cuma günü saat 10:00 ' da Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi A anfisinde yapıldı.

Bilindiği gibi, Beşinci Antalya Matematik Olimpiyadının Birinci Seçme Sınavı 8 Nisan 2000 Cumartesi günü yapılmış ve olimpiyada ülkemizin çeşitli yörelerinden binin üzerinde lise öğrencisi katılmıştı. Lise I ve Lise II-III gruplarına 20 'şer soruluk testler olarak uygulanan birinci seçme sınavı (bu sınavın soruları ve cevap anahtarları bundan önceki sayımız olan Cilt 9, Sayı 2 'de verilmişti; çözümleri de Cilt 9, Sayı 3 'te verilmişti) değerlendirildi ve Lise I grubundan 16, Lise II-III grubundan 19 öğrenci ikinci seçme sınavına çağrıldı.

İkinci sınavda, her iki gruba 5 'er sorudan oluşan klasik tip sınavlar verildi ve sınav süresi olarak 3 saat süre tanındı.

Beşinci Antalya Matematik Olimpiyadı İkinci Seçme Sınavının sorularını ve çözümlerini aşağıda sunuyoruz. Bazı sorular için jürinin önerdiği çözümlerle birlikte yarışmacıların değişik çözümlerini de sunuyoruz.

Her zaman olduğu gibi, sevgili okurlarımızın burada sunulan çözümlere bakmadan önce kendi çözümlerini üretmelerini salık veriyoruz. Kolay gelsin.

Lise I Grubu Soru ve Çözümleri:

Soru 1. p ve q tek asal sayılar ve p ile q arasında başka asal sayı yoksa, $p+q$ sayısının, her biri 1 'den büyük en az üç tane doğal sayının çarpımı olarak yazılabileceğini gösteriniz. (Çarpanların farklı olmaları gerekmez.)

Çözüm. p ve q tek olduğundan, $p+q$ çifttir ve $\frac{p+q}{2}$ sayısı p ile q arasında bir sayıdır. p ile q arasında başka asal sayı bulunmadığından, $\frac{p+q}{2}$ asal değildir; yani, 1 'den büyük iki tane doğal sayının çarpımıdır. Dolayısıyla, $p+q$ sayısı, 1 'den büyük üç tane doğal sayının çarpımıdır.

Soru 2. Sıfırdan farklı x, y, z sayıları

$$x^2 - y^2 = yz \quad \text{ve} \quad y^2 - z^2 = zx$$

eşitliklerini sağlıyor. $x^2 - z^2 = xy$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Verilen iki denklem taraf tarafa toplanınca

$$x^2 - z^2 = (x+y)z$$

elde edilir. Bu nedenle, iddianın ispatı için

$$(x+y)z = xy$$

olduğunu göstermek yeter. Eğer birinci denklem x ile ikinci denklem $(-y)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$x^3 - xy^2 - y^3 - yz^2 = 0,$$

$$z^2 = \frac{y^3 + xy^2 - x^3}{y}$$

elde edilir. Diğer yandan, birinci denklemden

$$z = \frac{x^2 - y^2}{y},$$

$$z^2 = \frac{x^4 - 2x^2y^2 - y^4}{y^2}$$

elde edilir. z^2 için elde edilen iki ifade eşitlenirse,

$$y^4 + xy^3 - x^3y = x^4 - 2x^2y^2 + y^4,$$

$$y^3 - x^2y = x^3 - 2xy^2,$$

$$x^2y - y^3 + x^3 - xy^2 = xy^2,$$

$$\frac{(x^2-y^2)y}{y} + \frac{x(x^2-y^2)}{y} = xy,$$

$$yz + xz = xy\ , \quad (x+y)z = xy$$

elde edilir. Bu, istenileni ispatlar.

Soru 3. Her biri 100 'den küçük olan 10 farklı pozitif tamsayının oluşturduğu her kümenin boş olmayan ve ayrık öyle iki altkümesi vardır ki, bu altkümelerden birindeki sayıların toplamı diğerindeki sayıların toplamına eşittir; ispat ediniz.

Çözüm. Her biri 100 'den küçük olan 10 farklı pozitif tamsayının oluşturduğu bir küme K olsun. K 'nın boş olmayan altkümelerinin sayısı $2^{10}-1=1023$ 'tür. Ayrıca, K 'nın boş olmayan her bir altkümesi A içindeki sayıların toplamı en az 1, en çok

$$91+92+\ldots+99+100=955\ ,$$

$$90+91+\ldots+98+99=945$$

'tir. O halde, K 'nın boş olmayan en az iki farklı altkümesi A ve B için A 'daki sayıların toplamı ile B 'deki sayıların toplamı birbirine eşittir. Şimdi, $S=A\setminus(A\cap B)$ ve $T=B\setminus(A\cap B)$ tanımlayalım. Bu takdirde, S kümesi boş olamaz, çünkü, aksi halde, $A\subseteq B$ ve dolayısıyla $A=B$ olurdu. Benzer şekilde, T de boş olamaz. Tanımdan dolayı S ve T ayrık olup, S 'deki sayıların toplamı, T 'deki sayıların toplamına eşittir.

Soru 4. Düzlem üzerinde, hepsi bir doğru üzerinde bulunmayan 2000 tane nokta işaretlenmiş ve bu noktaların herbirinin yanına o noktanın *yükü* diyeceğimiz bir reel sayı yazılmıştır. Üzerinde en az iki işaretlenmiş nokta bulunduran her doğrunun tüm işaretlenmiş noktalarının yükleri toplamı sıfır olduğuna göre, her noktanın yükünün sıfır olduğunu kanıtlayınız.

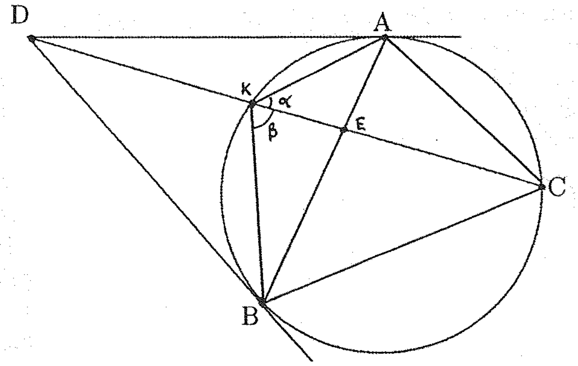
Çözüm. Bir işaretlenmiş nokta n ile, n 'nin yükü y_n ile; n 'den geçen ve üzerinde en az iki işaretlenmiş nokta bulunduran doğruların sayısı da s_n ile gösterilsin. Tüm işaretlenmiş noktalar bir doğru üzerinde bulunmadığından, $s_n>1$ olacaktır. n 'den geçen doğrular üzerinde bulunan tüm işaretlenmiş noktaların yükleri toplamına y diyelim. s_n tane doğrunun her biri üzerindeki işaretlenmiş noktaların yükleri toplamı sıfır olduğundan, s_n tane eşitliği taraf tarafa toplarsak,

$$y+(s_n-1)y_n=0 \qquad (*)$$

elde ederiz. $s_n-1>0$ ve y , y_n 'lerin toplamı olduğundan, $y=0$ olmak zorundadır ($y>0$ veya $y<0$ varsayımı çelişki yaratır; çünkü, y ile y_n 'lerin işaretleri farklı olmalıdır; bu ise olanaksızdır). Böylece $S=0$ olmalıdır. $(*)$ 'dan

Soru 5. Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberine A ve B noktalarında teğet olan doğruların kesişim noktası D; DC ile $[AB]$ 'nin kesişim noktası da E ile gösteriliyor. $\frac{|AE|}{|EB|}=\frac{|AC|^2}{|BC|^2}$ olduğunu ispat ediniz.

Çözüm.



DC doğrusu ile (ABC) çemberinin kesişim noktası K olsun.

$$\overset{\triangle}{DKA}\sim\overset{\triangle}{DAC} \text{ ve } \overset{\triangle}{DKB}\sim\overset{\triangle}{DBC}$$

$$\Longrightarrow \frac{|KA|}{|AC|}=\frac{|DA|}{|DC|} \text{ ve } \frac{|KB|}{|BC|}=\frac{|DB|}{|DC|}\ .$$

$$|DA|=|DB|\Longrightarrow$$

$$\frac{|KA|}{|AC|}=\frac{|KB|}{|BC|}\ ,\ \frac{|KA|}{|KB|}=\frac{|AC|}{|BC|} \qquad (1)$$

$$\frac{|KA|.|KE|\sin\alpha}{|KB|.|KE|\sin\beta}=\frac{|AE|}{|EB|} \qquad (2)$$

$$\frac{|AC|}{\sin\alpha}=2R=\frac{|BC|}{\sin\beta}\Longrightarrow\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (3)$$

$$(2) \text{ ve } (3)\Longrightarrow\frac{|KA|}{|KB|}\cdot\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|AE|}{|EB|} \qquad (4)$$

(4) 'te (1) yazılarak:

$$\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|AE|}{|EB|}$$

$$\frac{|AC|^2}{|BC|^2}=\frac{|AE|}{|EB|}$$

bulunur.

Lise II-III Grubu Soru ve Çözümleri:

Soru 1. Bir n doğal sayısının kendisinden küçük tüm doğal sayılara bölünmesiyle ortaya çıkan farklı kalanların toplamı $K(n)$ ile gösterilsin (Örnek: $K(9)=1+2+3+4=10$). $K(n) = n$ olan tüm n doğal sayılarını bulunuz.

Çözüm. Bu özelliğe sahip olan tek sayı yoktur. Gerçekten, $n = 2k-1, k \geq 1$, ise, bu takdirde, n yi $2k-2, 2k-1, \ldots, k+1, k$ ile bölünce, sırasıyla, $1, 2, 3, \ldots, k-1$ kalanları elde edilir. n yi k dan küçük olan sayılarla bölünce de bu kalanlardan biri elde edilir. Dolayısıyla,

$$K(2k-1) = 2k-1 \Rightarrow$$

$$1+2+3+\cdots+(k-1) = 2k-1$$

$$\Rightarrow \frac{(k-1)k}{2} = 2k-1$$

$$\Rightarrow k^2 - 5k + 2 = 0$$

olduğu görülür. $k^2 - 5k + 2$ 'nin hiç tamsayı çözümü bulunmadığından, n tek olunca $K(n) \neq n$ 'dir.

Şimdi, $K(n) = n$ olan çift sayıları araştıralım. $n = 2k$ ise, n 'yi $2k-1, 2k-2, \ldots, k+1$ ile bölünce, sırasıyla, $1, 2, 3, \ldots, k-1$ kalanlarını elde ederiz. n 'yi $k+1$ 'den daha küçük sayılarla bölünce de, bu kalanlardan biri elde edilir.Dolayısıyla,

$$K(2k) = 2k$$

$$\Leftrightarrow 1+2+\cdots+= 2k$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k-1)k}{2} = 2k$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 5k = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 5$$

($k \geq 1$ olduğundan). Demek ki, $K(n) = n$ olan tek sayı $n = 10$ 'dur.

Soru 2. İki öğrenci, tahtaya $x^2 + 19x + 91$ polinomunu yazarak şöyle bir oyun oynuyorlar: Birinci oyuncu,polinomun başkatsayısı dışındaki katsayılardan birini silip, onun yerine bir fazlasını veya bir eksiğini yazıyor. Benzer şekilde ikinci oyuncu da ortaya çıkan polinomun başkatsayısı dışındaki katsayılardan birini silip, onun yerine bir fazlasını veya bir eksiğini yazıyor ve oyun bu şekilde sürdürülüyor. Bir süre sonra, tahtada $x^2 + 91x + 19$ polinomu yazılmış olduğuna göre, bundan önce yazılan polinomlardan en az birinin köklerinin ikisinin de tamsayı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm 1. $f_0(x) = x^2 + 19x + 91$ diyelim ve $k-$ıncı adımda ortaya çıkan polinomu $f_k(x)$ ile gösterelim. Her $k \geq 0$ için $f_k(-1)$ ve $f_{k+1}(-1)$ tamsayılarının farkının mutlak değeri 1 olur. Şimdi, $f_0(-1) > 0$ ve $f_n(-1) = x^2 + 91x + 19|_{x=-1} < 0$ olduğundan, en az bir k için $f_k(-1) = 0$ olacaktır. $f_k(x) = x^2 + px + q$ dersek, $x^2 + px + q = 0$ denkleminin bir kökü tam olduğundan, diğer kökü de tam olacaktır.

Çözüm 2. (M. Bumin Yenmez, Alp Şimşek, Murat Ak, Caner Pişgin, Emre Çakır, Fatih Deniz, Ali Adalı, Murat Bilge Badem) Tahtada çıkan polinomlara sırasıyla $x^2 + a_i x + b_i$ diyelim; $i = 1, 2, \cdots, n$. Birinci polinom $x^2 + 19x + 91$, n-inci polinom $x^2 + 91x + 19$ 'dur. Şimdi, $a_i - b_i$ farklarına bakalım. $a_1 - b_1 = 19 - 91 = -72; a_n - b_n = 91 - 19 = 72$ 'dir. Soruda verilene göre, bu fark her adımda ya 1 artıyor ya da 1 azalıyor. Başlangıçtaki fark -72, sonraki fark 72 olduğundan, $1 < s < n$ olan uygun bir s sayısı için $a_s - b_s = 1$ olmalıdır. Dolayısıyla, s-inci polinom,

$$x^2 + (b_s + 1) + b_s = (x + b_s)(x + 1)$$

biçimindedir ve bu polinomun kökleri $-b_s$ ve -1 tamsayılarıdır.

Soru 3. $n > 3$ olmak üzere $a_1, a_2, \cdots, a_n$ reel sayıları için

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \text{ ve } a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq n^2$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sayıları içinde 2 'den küçük olmayan en az bir sayı bulunduğunu ispat ediniz.

Çözüm 1. Aksini varsayalım. O zaman, her $k = 1, \cdots, n$ için $a_k < 2$ olur.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \Rightarrow a_k > n - 2(n-1) = 2 - n$$

$$\Rightarrow (a_k - 2)(a_k - (2-n)) < 0$$

$$\Rightarrow a_k^2 - (4-n)a_k < 2n - 4$$

$(1 \leq k \leq n)$. Son eşitsi

toplanınca,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + (n-4)\sum_{k=1}^{n} a_k < n(2n-4)$$

olduğu görülür. Burada $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq n^2$ ve $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq n$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} n^2 + (n-4)n &< n.2.(n-2), \\ 2n^2 - 4n &< 2n^2 - 4n \end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir.

Çözüm 2. (M.Bumin Yenmez, Alp Şimşek) a_i 'lerin k tanesi pozitif veya sıfır, $n-k$ tanesi negatif olsun, $1 \leq k \leq n$. a_i 'leri

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0 > a_{k+1} \geq \cdots \geq a_n$$

biçiminde sıralayabiliriz.

Şimdi, soruda verilen önermenin yanlış olduğunu varsayalım. Yani, $a_1 < 2$ olsun. Bu durumda,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq n - (a_{k+1} + \cdots + a_n)$$

$$\Rightarrow 2k > a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq n - (a_{k+1} + \cdots + a_n)$$

$$\Rightarrow (2k-n) > -(a_{k+1} + \cdots + a_n) > 0$$

$$\Rightarrow$$

$$(2k-n)^2 > (a_{k+1} + \cdots + a_n)^2 \geq a_{k+1}^2 + \cdots + a_n^2.$$

Diğer yandan,

$$a_k \leq \cdots \leq a_1 < 2 \Rightarrow a_1^2 + \cdots + a_k^2 < 4k \quad (*)$$

'dır. Son iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa,

$$n^2 \leq a_1^2 + \cdots + a_n^2 < (2k-n)^2 + 4k$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} 4k^2 - 4kn + 4k > 0 \quad &\Rightarrow \quad 4k(k-n+1) > 0 \\ &\Rightarrow \quad k - n > -1 \\ &\Rightarrow \quad k - n > 0 \\ &\Rightarrow \quad k = n, \end{aligned}$$

yani, a_i' lerin hepsinin pozitif olduğu görülür. $(*)$ eşitsizliği ve hipotezden,

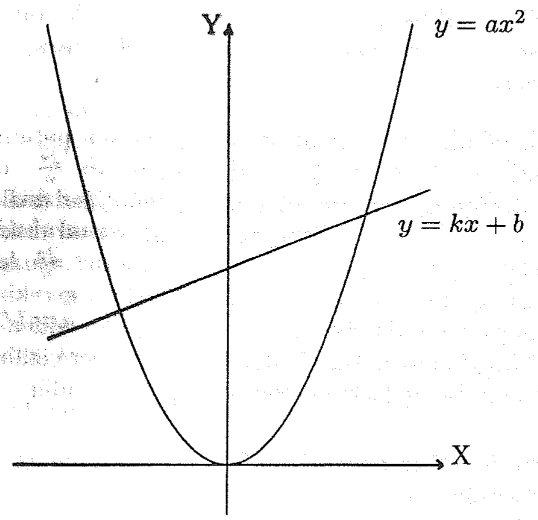
$$n^2 \leq a_1^2 + \cdots + a_n^2 < 4n \Rightarrow 4 > n$$

çelişkisi ortaya çıkar.

Soru 4. Bir mühendis, her biri düzlemde uygun bir parabolün iç bölgesini aydınlatabilen sonlu sayıda fener ile tüm düzlemi aydınlatabileceğini söyleyince, matematikçi olan arkadaşı bunun mümkün olmadığını kanıtlıyor. Bunu siz de kanıtlayınız.

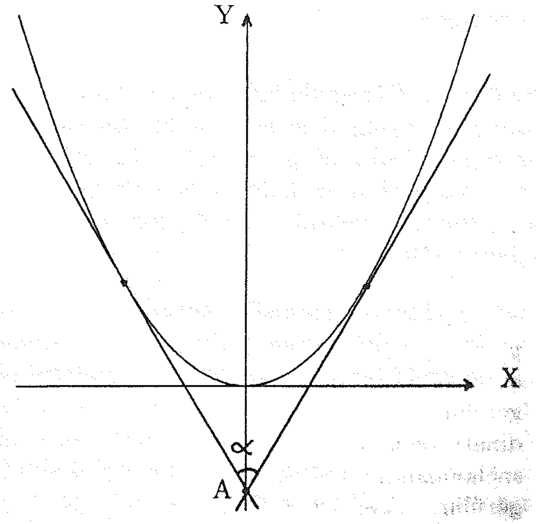
Çözüm 1. Düzlemde bir parabol alalım ve koordinat sistemini öyle seçelim ki, bu sistemde parabolün denklemi $y = ax^2$, $(a > 0)$ olsun. Parabolün iç bölgesindeki (x, y) noktaları (sınırdaki noktalar dahil) için $y \geq ax^2$ sağlanacaktır.

Şimdi, y-eksenine paralel olmayan herhangi bir $y = kx + b$ doğrusunu alalım. Bu doğrunun en fazla sonlu bir kısmının "aydınlanabileceğini" görelim. Aydınlanmış noktaların birinci koordinatı olan x için $kx + b \geq ax^2$ eşitsizliği sağlanmalıdır. Buradan, $ax^2 - kx + b \leq 0$ olduğu görülür. Eğer $P(x) = ax^2 - kx + b$ $(a > 0)$ polinomunun diskriminantı $D = k^2 - 4ab$ negatif ise, doğru, parabolü hiç kesmiyor;$D \geq 0$ ise; doğru, parabolü $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ gibi $D = 0$ durumunda çakışan, iki noktada keser ve doğrunun aydınlanan kısmı bu iki noktayı birleştiren doğru parçasıdır. $D = 0$ durumunda doğrunun bir tek noktası aydınlanmıştır. Böylece, parabolün simetri eksenine paralel olmayan her doğrunun en fazla sonlu bir parçası aydınlanabilir.



Şimdi, sonlu sayıda fener, dolayısıyla, onların aydınlattığı sonlu sayıda parabol, düzlemde nasıl yerleştirilmiş olursa olsun, bu parabollerin hiç birinin simetri eksenine paralel olmayan bir doğrunun tamamı aydınlanamaz. Bu nedenle, düzlemin tamamı aydınlanamaz.

Çözüm 2. (Sabri Yılmaz)

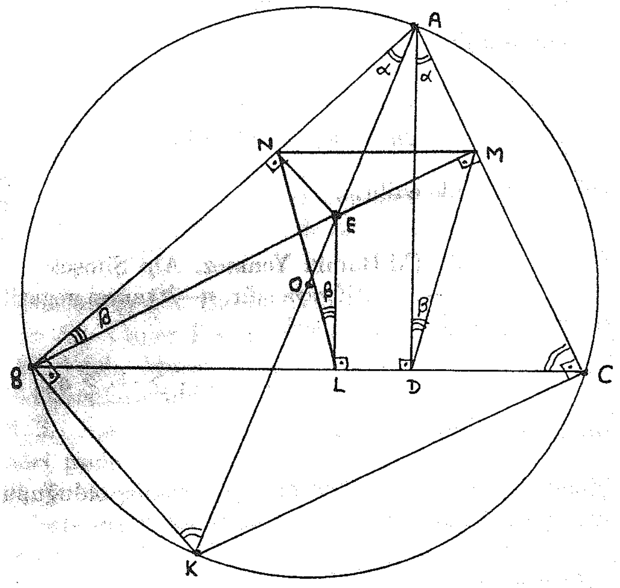


Bir parabolün iç bölgesini istediğimiz kadar küçük bir açının iç bölgesi içine alabiliriz. Çünkü, düzlemde koordinat sistemini, şekilde görüldüğü gibi, parabolün tepe noktası orijin ve simetri ekseni y-ekseni olacak şekilde seçersek; parabol üzerinde y-eksenine göre simetrik olan iki noktadan teğetler çizersek, bu teğetler y-ekseni üzerinde bir A noktasında kesişirler. Böylece oluşan açının iç bölgesi, parabolün iç bölgesini içerir. Teğetleri uygun yerden çizerek, oluşan α açısını istediğimiz kadar küçültebileceğimiz açıktır.

Parabollerin sayısı n olsun ve her bir parabolü köşesi A_i, $1 \leq i \leq n$ de olan ve $\frac{2\pi}{n}$ 'den küçük olan α_i açısının içine alalım. Eğer düzlem bu şekilde $\frac{2\pi}{n}$ 'den küçük n tane açı tarafından örtülebilseydi, köşeleri çakışan n tane $\frac{2\pi}{n}$ 'den küçük açı tarafından da örtülebilmesi gerekirdi. Fakat bu mümkün değildir; çünkü, sözü edilen ortak köşeyi merkez kabul eden bir çember çizilirse, çemberin bu açılarla örtülemeyeceği görülür.

Soru 5. Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O; $[OA]$ üzerinde alınan bir E $(A \neq E \neq O)$ noktasından $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarlarına indirilen dikmelerin yakları, sırasıyla N, L, M; ABC üçgeninin A 'dan geçen yüksekliğinin $[BC]$ kenarını kestiği nokta D ile gösterilmek üzere; N, L, D, M noktalarının bir çember üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

Çözüm.



Çapı gördükleri için $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^o$ daire ve buradan,

$$MN /\!/ BC \qquad (1)$$

'dir. $\overset{\triangle}{ABK} \sim \overset{\triangle}{ADC}$ $(\widehat{AKB} = \widehat{ACD})$ olduğundan,

$$\frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|KA|}{|CA|} = \frac{|KB|}{|CD|} \qquad (2)$$

$\overset{\triangle}{ANE} \sim \overset{\triangle}{ABK}$ 'dan

$$\frac{|NA|}{|BA|} = \frac{|EA|}{|KA|}$$

ve (1) 'den,

$$\frac{|EA|}{|KA|} = \frac{|MA|}{|CA|} \qquad (3)$$

bulunur. (2) ve (3) 'ten

$$\frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|EA|}{|MA|};$$

böylece,

$$\frac{|BA|}{|EA|} = \frac{|DA|}{|MA|}$$

olduğu görülür. $\overset{\triangle}{ABK} \sim \overset{\triangle}{ADC}$ 'den, $\widehat{BAE} = \widehat{DAM}$ 'dir. O halde, $\overset{\triangle}{BAE} \sim \overset{\triangle}{DAM}$ 'dir (KAK). Buradan $\widehat{ABE} = \widehat{ADM}$ ve $NBLE$ 'nin çemberselliğinden, $\widehat{ABE} = \widehat{NLE}$ bulunur. Dolayısıyla, $\widehat{NLD} = \widehat{MDL}$ olur; yani, $MNLD$ dörtgeni bir ikizkenar yamuktur ve bu nedenle M, N, L, D noktaları aynı çember üzerindedir.

MATEMATİKSEL ÖZDEYİŞLER

Aşağıda çeşitli matematikçilerin özdeyişlerini ya da matematikçi olmayan kişilerin matematik konusundaki özdeyişlerini bulacaksınız. İnternet'ten derlenen bu özlü sözleri beğeneceğinizi umuyoruz.

□ **Henkin, Leon:** "Matematik konusunda sınıfta yaptığımız en büyük yanlış anlamalardan biri, öğretmenin tartışılan herhangi bir problemin çözümünü hep biliyor görünmesidir. Öğrenciler, sanki, bir yerlerde tüm ilginç soruların doğru yanıtlarını barındıran bir kitabın varolduğunu ve öğretmenlerin bunları bildikleri gibi bir düşünceye kapılırlar. Ayrıca bu kitaba sahip olunursa her şeyin çözümleneceğini sanırlar. Matematiğin gerçek doğasına ne kadar da aykırı bir durum!"

□ **Hermite, Charles (1822-1901):** "Abel, matematikçilere, onları 500 yıl meşgul edecek kadar iş bırakmıştır."

□ **Hermite, Charles (1822-1901):** "Bizler matematikte usta değil hizmetçiyiz."

□ **Hilbert, David (1862-1943):** *(Mezar taşının üstündeki yazı)*: "Wir müssen wissen. Wir werden wissen. (Bilmek zorundayız. Bileceğiz.)"

□ **Hilbert, David (1862-1943):** "Matematik, kağıt üzerinde belirli kurallar içinde anlamsız işaretlerle oynanan bir oyundur."

□ **Hilbert, David (1862-1943):** "Matematik hiç bir ırk ya da sınır tanımaz. Matematik için kültürel dünyamız biricik ülkemizdir."

□ **Hilbert, David (1862-1943):** "Sonsuz! Bunun dışında hiç bir soru insan ruhunu böylesine derinden etkilememiştir."

□ **Jacobi, Carl:** "Her zaman genelleştirmeliyiz."

□ **Jacobi, Carl:** *(Descartes 'in küllerinin Fransa'ya geri dönmesi konusunda)*: "Genellikle büyük insanların küllerine sahip olmak, onların kendilerine sahip olmaktan daha kolaydır."

□ **Kant, Emmanuel (1724-1804):** "Matematik bilimi, salt akıl yürütmenin, deneyimin yardımı olmaksızın, başarılı bir biçimde sınırlarını nasıl genişlettiğinin en parlak örneğini oluşturmaktadır."

□ **Kepler, Johannes (1571-1630):** "Maddenin olduğu her yerde geometri de vardır."

□ **Kline, Morris:** "Bir kanıt, bize kuşkularımızı nerede yoğunlaştırmamız gerektiğini gösterir."

□ **Kline, Morris:** "Mantık, güven içinde yanlış yapma sanatıdır."

□ **de Laplace, Pierre-Simon (1749-1827):** "Bildiklerimiz çok fazla değildir. Bilmediklerimiz ise sınırsızdır."

□ **de Laplace, Pierre-Simon (1749-1827):** "Euler 'i okuyunuz. O her şeyde ustamızdır."

□ **Leibniz, Gottfried Whilhem (1646-1716):** "Temiz olan, pis kokmayan ve şakadan anlayan bilge bir kişi bulmak çok güçtür."

□ **Lobatchevsky, Nikolai:** "Ne kadar soyut olursa olsun, matematiğin dalları arasında, bir gün gerçek dünyanın olaylarına uygulanamayacak olanı hiç yoktur."

□ **Luther, Martin (1483-1546):** "Tıp insanları hasta eder, matematik üzgün, teoloji de kuşkucu."

□ **Mann, Thomas (1875-11955):** "Büyük bir gerçek, tersi de büyük olan bir gerçektir."

□ **Mathesis, Adrian:** "Yeni teoreminiz çok büyük bir basitlikle ifade edilebiliyorsa, bu durumda patolojik bir aykırı durum sözkonusudur."

□ **Mathesis, Adrian:** "Tüm büyük teoremler gece yarısından sonra keşfedilmiştir."