PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 30 Kasım 2000 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.216. $\cdots 12345678987654321$ biçiminde olup 1999^{2000} sayısına bölünen doğal sayı var mıdır?

A.217. $x^3-6x^2+ax+a=0$ denkleminin kökleri olan x_1, x_2 ve x_3 sayılarının

$$(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0$$

eşitliğini sağlamasını garanti eden a sayılarının hepsini bulunuz.

A.218. Toplamları 1 'e eşit olan herhangi pozitif $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n$ sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{2-\alpha_i} \geq \frac{n}{2n-1}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

A.219. Üç boyutlu uzayı, birbiriyle kesişmeyen ve birbirine kongruent olan 1001 tane kümenin birleşimi biçiminde ifade etmek mümkün müdür?

A.220. Bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin BC yayı üzerinde alınmış P noktasından, BC, AC, AB doğrularına, sırasıyla, PK, PL, PM dikleri indirilmiştir.

$$\frac{|BC|}{|PK|}=\frac{|AC|}{|PL|}+\frac{|AB|}{|PM|}$$

eşitliğini ispatlayınız.

YARIŞMA PROPLEMLERİ

Y.216. $abc=1$ ve $a^3>36$ ise,

$$\frac{a^2}{3}+b^2+c^2>ab+bc+ca$$

eşitsizliğinin sağlanacağını kanıtlayınız.

Y.217. Düzlem hanelere bölünmüş ve bu hanelerden rasgele 100 tanesi işaretlenmiştir. İspat ediniz ki hiç ortak noktası olmayan en az 25 tane işaretlenmiş hane vardır.

Y.218. Her $x\in[-1,1]$ için $|P(x)|\leq 1$ koşulunu sağlayan $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c,d\in \mathbb{R})$ polinomlar kümesine M diyelim. Bu takdirde, öyle a sabiti vardır ki, M 'den seçilen her polinomun baş katsayısı a için $|a|\leq A$ eşitsizliği sağlanacaktır; kanıtlayınız.

Y.219. Köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir kare verilmiştir. Çember üzerinde alınmış herhangi bir noktadan karenin köşelerine kadar olan uzaklıkları gösteren dört sayıdan en az birinin irrasyonel olduğunu ispatlayınız.

Y.220. Alanı S olan $A_1A_2A_3$ üçgeninin A_i, $(i=1,2,3)$ tepesinden çıkan yüksekliğine A_iH_i diyelim. $A_1A_2A_3$ üçgeninin eşkenar olması için gerek ve yeter koşulun

$$S=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}|A_iA_{i+1}||A_iH_i|, \quad (A_4=A_1)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

A.206. $x+y=1$ koşulunu sağlayan sayılar içinde x^3+xy+y^3 polinomuna minimum değer veren x ve y 'yi bulunuz.

Çözüm. $x+y=1$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} x^3+xy+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2)+xy \\ &= x^2-xy+y^2+xy = x^2+y^2 = x^2+(1-x)^2 \\ &= 2(x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

olur. En son ifadenin minimum olması için $x=\frac{1}{2}$ olmalıdır. $x+y=1$ koşulundan da $y=\frac{1}{2}$ bulunur.

A.207. Bir n doğal sayısının tüm pozitif bölenleri sayısına s diyelim. n 'nin tüm pozitif bölenleri çarpımını n ve s cinsinden bulunuz.

Çözüm. Eğer $q_i, (i = 1, 2, ..., s)$ n 'nin bir pozitif böleni ise, $n = q_i p_i$ sağlanacak biçimde bir p_i pozitif böleni bulunacaktır. q_i 'lerin artan sırada dizildiğini, yani,

$$1 = q_1 < q_2 < ... < q_{s-1} < q_s = n$$

olduğunu varsayarsak, $n = p_1 > p_2 > ... > p_{s-1} > p_s = 1$ olur.

$\{q_1, q_2, ..., q_s\}$ ve $\{p_1, p_2, ..., p_s\}$ kümelerinin aynı kümeler olduğunu görmek zor değildir. $n = p_i q_i$ eşitliğinden

$$n^s = p_1 q_1 . p_2 q_2 ... p_s q_s = (p_1 p_2 ... p_s)(q_1 q_2 ... q_s) = (q_1 q_2 ... q_s)^2$$

elde edilir ki, buradan da $q_1 q_2 ... q_s = \sqrt{n^s}$ olur.

A.208. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbf{R}$ ve $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \geq 0$ ise,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_j\right|$$

eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eden bir $k \in \mathbf{N}$ bulunduğunu kanıtlayınız. (Samanyolu Matematik Grubu)

Çözüm. $A_0 = 0$ ve her $k = 1, ..., n$ için $A_k = a_1 + ... + a_n$ olsun. Bu durumda, her $i = 1, ..., n$ için

$a_i = A_i - A_{i-1}$ olur ve

$$\sum a_i b_i = \sum (A_i - A_{i-1}) b_i$$
$$= \sum A_i b_i - \sum A_{i-1} b_i$$
$$= \sum A_i b_i - \sum A_i b_{i+1}$$
$$= A_n b_n + \sum A_i (b_i - b_{i+1})$$

elde edilir. Eğer $maks\{A_1, A_2, ..., A_n\} = A_k$ ise,

$$|\sum a_i b_i| \leq |A_n| \, b_n + \sum |A_i| \, (b_i - b_{i+1})$$
$$\leq |A_k| \, b_n + |A_k| \sum (b_i - b_{i+1})$$
$$= |A_k| \, b_1 \leq |A_k| = |\sum a_j|$$

olur.

A.209. x_1 ve $x_2, x^2 - 6x + 1 = 0$ denklemini sağlayan sayılar olsun. Hiç bir n doğal sayısı için $x_1^n + x_2^n$ sayısının 5 ile bölünmediğini ispatlayınız. (Samanyolu Matematik Grubu)

Çözüm. Her n doğal sayısı için

$$x_1^n + x_2^n$$
$$= (x_1^{n-1} + x_2^{n-1})(x_1 + x_2) - x_1 x_2^{n-1} - x_2 x_1^{n-1}$$
$$= (x_1^{n-1} + x_2^{n-1})(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$$

'dir. Vieta Teoreminden, $x_1 + x_2 = 6$ ve $x_1 x_2 = 1$ olduğu görülür. O halde,

$$x_1^n + x_2^n = 6(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$$

'dir. Her $n \geq 1$ için $x_1^n + x_2^n = a_n$ olsun. Bu takdirde, her $n \geq 3$ için

$$a_n \equiv a_{n-1} - a_{n-2} \; (\; mod \; 5)$$

olur. Diğer yandan,

$$a_1 \equiv 1(\; mod \; 5) \quad , \quad a_2 \equiv 4(\; mod \; 5),$$
$$a_3 \equiv 2(\; mod \; 5) \quad , \quad a_4 \equiv 4(\; mod \; 5),$$
$$a_5 \equiv 1(\; mod \; 5) \quad , \quad a_6 \equiv 2(\; mod \; 5),$$
$$a_7 \equiv 1(\; mod \; 5) \quad , \quad a_8 \equiv 4(\; mod \; 5),$$

ve tümevarımla, her $k \geq 1$ için

$$a_k \equiv a_{k+6}(\; mod \; 5)$$

olduğu görülür. Bu, her $n \geq 1$ için $a_n \equiv 0(\; mod \; 5)$ olduğunu gösterir.

A.210. $ABCD$ yamuğunun köşegenlerinin kesişim noktası E, $[BC]$ tabanı üzerinde bir nokta K ve $A\hat{K}E = D\hat{K}E$ ise, C 'nin AK doğrusuna uzaklığı $|CC'|$, B 'nin DK doğrusuna uzaklığı $|CC'|$ olmak üzere, $|BB'| = |CC'|$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. E, AKD 'nin açıortayı üzerinde olduğundan, AK ve DK 'dan eşit uzaklıktadır. Bu uzaklığın, C 'nin AK 'ya uzaklığına oranı $\frac{EP}{CC'}$ ve B için de bu oran $\frac{EQ}{BB'}$ 'dür.

$\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{EP}{CC'}$, $\frac{DE}{DB} = \frac{EQ}{BB'}$ ve

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow |CC'| = |BB'|.$$

Y.206. 25×25 karesinin her hanesine $+1$ veya -1 sayılarından biri yazılmıştır. i-inci satırdaki sayıların çarpımına a_i ve j-inci sütundaki sayıların çarpımına da b_j diyelim.

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_{25} + b_{25} \neq 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1. Kare üzerinde yazılmış bütün sayıların çarpımına A dersek , $a_1a_2...a_{25} = A = b_1b_2...b_{25}$ olur. a_i ve b_j 'ler ± 1 olduğundan, $a_1 + b_1 + ... + a_{25} + b_{25} = 0$ olması için $a_1, b_1, ..., a_{25}, b_{25}$ sayılarının tam 25 tanesi $+1$ ve 25 tanesi de -1 olmalıdır. Böylece, a_i ler içinde n tane -1 varsa, b_i 'ler içinde $25 - n$ tane -1 bulunmalıdır. Fakat, n ve $25 - n$ sayılarının biri çift olduğunda, diğeri tek sayı olacağından, $a_1a_2...a_{25}$ ve $b_1b_2...b_{25}$ sayılarının biri negatif, diğeri de pozitif olmalıdır. Ancak, bu çarpımların ikisi de aynı bir Asayısına eşit oalcağından, bu mümkün değildir. Dolayısıyla, $a_1 + b_1 + ... + a_{25} + b_{25} = 0$ olamaz.

(**Çözenler:** *Erdem Koyuncu (Antalya), Metehan Aydın (Ankara)*).

Çözüm 2. $+1$ ve -1 'den oluşan bir dizinin terimleri çarpımı $+1$ ya da -1 'dir. Bu nedenle $a_i = \mp 1$, $b_j = \mp 1$ olmalıdır. $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_{25} + b_{25} = 0$ diyerek aksini varsayalım.

Bu toplamın 0 olması, terimlerin 25 tane 1, 25 tane -1 içermesiyle mümkündür. (1)

Bu nedenle tüm terimlerin çarpımı -1 'dir. Fakat tüm terimlerin çarpımında karenin içindeki bir sayı iki kez geçmektedir (hem sütunda hem de satünda). Bu sayı 1 ise, $(1)^2 = 1$, -1 ise, $(-1)^2 = 1$ olur. Yani tüm terimlerin çarpımı 1 olmalıdır. Bu da (1) ile çelişir. Yani $a_1 + b_1 + ... + a_{25} + b_{25} \neq 0$ olmalıdır.

(**Çözenler:** *Ali Nabi Duman (Ankara)*).

Y.207. Herhangi 3 tanesinden bir üçgen yapılabilen 5 doğru parçası verilmiştir. Bu doğru parçalarından yapılabilen üçgenler içinde en az bir tanesinin dar açılı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Parçacıkların uzunluklarını azalmayan sırada dizelim : $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Bu parçacıklardan yapılabilen üçgenler içinde hiç dar açılı bulunmadığını varsayalım. O halde

$$c^2 \geq a^2 + b^2, d^2 \geq c^2 + b^2, e^2 \geq d^2 + c^2$$

olacaktır. Eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$c^2 + d^2 + e^2 \geq a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 \Rightarrow$$
$$e^2 \geq a^2 + 2b^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2)$$
$$\geq a^2 + b^2 + 2bc \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$
$$\Rightarrow e \geq a + b \text{ olur.}$$

Sonuncu eşitsizlikten ise, uzunlukları a, b, e olan parçacıklardan bir üçgen yapılamayacağı görülür. Çelişki.

(**Çözenler:** *Ali Nabi Duman (Ankara)*).

Y.208. Aşağıdaki denklemin tüm rasyonel köklerini bulunuz:

$$abx^2 + (a^2 + b^2)x + 1 = 0 \quad , \quad (a, b \in \mathbf{Z})$$

Çözüm. $ab \neq 0$ olduğunu varsayalım. $\Delta = (a^2 + b^2)^2 - ab$ dersek, denklemin rasyonel kökünün varlığı için $\sqrt{\Delta}$ sayısının bir tamsayı olmasının gerekli ve yeterli olduğunu söyleyebiliriz.

$a = b$ ise, $\Delta = 4a^2(a^2 - 1)$ sayısı, sadece, $a^2 = 1$ için tam kare olur. Böylece, bu durumda ya $a = b = 1$ ya da $a = b = -1$ olmalıdır. Her iki durumda da denklem $x^2 + 2x + 1 = 0$ denklemine dönüşür ve kökü $x = -1$ 'dir.

$a \neq b$ ise, $ab < 0$ için $(a^2 + b^2)^2 < \Delta < (a^2 + b^2 + 1)^2$, ve $ab > 0$ için $(a^2 + b^2 - 1)^2 < \Delta < (a^2 + b^2)^2$ eşitsizlikleri bu durumda Δ 'nın bir tam kare olamayacağını göstermektedir.

$ab = 0$ durumunu incelemek okuyucuya bırakılmıştır.

(**Çözenler:** *Ali Nabi Duman (Ankara), Necati Girgin (Denizli)*).

Y.209. $a^n + 2^n + 1$ sayısı $a^{n+1} + 2^{n+1} + 1$ sayısını bölecek biçimde tüm a ve n pozitif tamsayılarını bulunuz.

Çözüm. $a = 1$ ve $a = 2$ için problemin çözümü olmayacağı kolayca görülebilir.

$a \geq 3$ olduğunu varsayalım.

$$a^{n+1} + 2^{n+1} + 1$$
$$= a(a^n + 2^n + 1) + 2^{n+1} - a.2^n - a + 1$$

eşitliğini kullanarak $a^n + 2^n + 1 \mid a^{n+1} + 2^{n+1} + 1$ sağlanması için gerek ve yeter koşulun,

$$a^n + 2^n + 1 \mid (a - 2)2^n + a - 1$$

olduğunu söyleyebiliriz. O halde

$$a^n + 2^n + 1 \leq (a - 2)2^n + a - 1$$

olmalıdır. Sonuncu eşitsizliği

$$(\frac{a}{2})^n + 1 \leq (a-2) + \frac{a}{2}.\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

biçiminde yazalım.

$\frac{a}{2} \geq \frac{3}{2}$ olduğundan, $\frac{a}{2} = 1 + y$, $y \geq \frac{1}{2}$ yazabiliriz. Bernoulli eşitsizliğinden $(1+y)^n \geq 1 + ny$ olur. Bunları yukarıdaki eşitsizlikte gözönüne alırsak,

$$2 + ny \leq 2y + \frac{1}{2^{n-1}}y$$

ve böylece,

$$n \leq 2 + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{y} < 2 + \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow n \leq 2$$

olduğu görülür. $n = 2$ durumunda $a^2 + 5 \leq 5x - 9$ eşitsizliği elde ediliyor. Fakat bunun çözümü yoktur.

$n = 1$ halinde, $\frac{a^2+5}{a+3} = a + 3 + \frac{14}{a+3} \in \mathbb{N}$ olmalıdır ki, bu da $a + 3 = 7$ $(a = 4)$ ve $a + 3 = 14$ $(a = 11)$ durumlarında sağlanır.

Böylece, problemin koşulunu sağlayan ikililer $(a, n) = (4, 1), (11, 1)$ 'dir.

(**Çözenler:** *Necati Girgin (Denizli), Ahmet Araç (Denizli), Ali Nabi Duman (Ankara)*).

Y.210. ABC dar açılı üçgeninde A, B, C 'den $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla D, E, F; yine A, B, C 'den EF, FD, DE 'ye indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla P, Q, R ile gösterilmek üzere AP, BQ, CR doğrularının aynı noktadan geçtiğini gösteriniz.

Çözüm. $AEF = AEP = ABC$, $APE = ADP = 90^o$ olduğundan $BAD = PAE$ bulunur. AP ile (ABC) çemberinin kesişim noktası K ile gösterildiğinde $AKC = ABC$ olur. O halde $ACK = 90^o$ ve $[AK]$, (ABC) 'nin çapıdır. Dolayısıyla AP, bu çemberin merkezinden geçer. Benzer biçimde, BQ, CR de merkezden geçer.

(**Çözenler:** *Necati Girgin (Denizli), Ali Nabi Duman (Ankara), Metehan Aydın (Ankara), Ahmet Anaç (Denizli), Hasan Karabıyık (İzmir)*).

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.
* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya önelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
* Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,

07058-Antalya

adresine gönderilecektir.