EŞİTSİZLİKLERİN YARDIMIYLA DENKLEM ÇÖZÜMÜ

Ali Nabi Duman
Özel Arı Fen Lisesi, ANKARA

Bu yazıda eşitsizliklerin yardımıyla denklem çözümleri anlatılacaktır. Sunuş kolaylığı olması için problemler dört gruba ayrılmıştır. Elbette ki bu grupların sayısı ve içlerindeki soru çeşidi artırılabilir.

(a) Sıralama Yöntemi: Bir simetrik denklem sisteminin bilinmeyenleri x_1, x_2, ..., x_n $(n \in \mathbb{N})$ olsun. Bu sistemin çözümünü bulurken $x_n \geq x_{n-1} \geq ... \geq x_1$ kabul etmemizde bir sakınca yoktur. Bu şekilde elde edilen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ çözümünün permütasyonları tüm sıralı çözüm takımlarını verecektir. Şimdi bir kaç örnekle yöntemin kulanımını görelim:

Örnek 1: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2$ denkleminin pozitif tamsayılarda çözümünün olmadığını gösteriniz. (1991 Olimpiyadı Takım Seçme Sınavı)

Çözüm: Denklem sistemi simetrik olduğundan, $a \geq b \geq c \geq d > 0$ kabulü çözüm kümesini değiştirmez. Buradan $a^2 \geq b^2$, $a^2 \geq c^2$ ve $a^2 \geq d^2$ elde ederiz.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow 4a^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 \geq a^2b^2c^2d^2 \text{ bulunur.}$$

$a^2 > 0$ olduğundan eşitsizliğin iki tarafını a^2 'ye bölmek eşitsizliğin yönünü değiştirmez, $4 \geq b^2c^2d^2$ elde edilir.

b, c, d birer pozitif tamsayı olduğundan son eşitsizlik ancak $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$ veya $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$ olduğunda mümkündür.

Eğer $(b, c, d) = (2, 1, 1)$ ise, (1) 'den $a^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 4a^2$ elde edilir. Buradan $a^2 = 2, a = \mp\sqrt{2}$ bulunur ki bu da $a \in \mathbb{N}$ ile çelişir. Eğer $(b, c, d) = (1, 1, 1)$ ise, (1) 'den $a^2 + 3 = a^2 \Rightarrow 3 = 0$ çelişkisi elde edilir. Yani $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2d^2$ denkleminin pozitif tamsayılarda çözümü yoktur.

Örnek 2: (Kanada Olimpiyadı)

$$\tfrac{4x^2}{1+4x^2} = y \qquad (1)$$

$$\tfrac{4y^2}{1+4y^2} = z \qquad (2)$$

$$\tfrac{4z^2}{1+4z^2} = x \qquad (3)$$

denklem sisteminin (x, y, z) çözüm takımlarını bulunuz.

Çözüm: $x^2 \geq 0$ olduğundan

$$4x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{4x^2}{1+4x^2} \geq 0 \Rightarrow y \geq 0\,.$$

Benzer şekilde $x \geq 0$, $z \geq 0$ elde edilir. Şimdi $y \geq z$ kabul edelim. $y \geq z$, (1) ve (2) 'den $\frac{4x^2}{1+4x^2} \geq \frac{4y^2}{1+4y^2}$, $1 + 4x^2 > 0$ olduğundan içler dışlar çarpımı yapmamız eşitsizliğin yönünü değiştirmez:

$$4x^2(1 + 4y^2) \geq 4y^2(1 + 4x^2)$$

$$\Rightarrow 4x^2 \geq 4y^2 \Rightarrow x^2 \geq y^2.$$

$x, y \geq 0$ olduğundan $x \geq y$ elde edilir. Dolayısıyla $x \geq y \geq z$ olur. $x \geq y$, (1) ve (3) 'ten,

$$\tfrac{4z^2}{1+4z^2} \geq \tfrac{4x^2}{1+4x^2} \Rightarrow 4z^2 \geq 4x^2 \Rightarrow z \geq x$$

bulunur.

Yani $z \geq x \geq y \geq z$ olur ki bu $x = y = z$ durumunda mümkündür. $\frac{4x^2}{1+4x^2} = x$ denklemi $x = 0$ için sağlanır. Çözümün biri $(0, 0, 0)$ olarak bulunur.

$$x > 0 \Rightarrow \tfrac{4x}{1+4x^2} = 1 \Rightarrow 4x = 1 + 4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1}{2}.$$

Buradan $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ bir başka çözüm olur.

Örnek 3:

$$x_1^2 + 2ax_1 + b^2 = x_2$$

$$x_2^2 + 2ax_2 + b^2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$x_n^2 + 2ax_n + b^2 = x_1$$

sisteminin tüm çözümlerini bulunuz $(b \geq a > 0)$.

Çözüm: $b \geq a \Rightarrow b^2 \geq a^2 \Rightarrow b^2 - a^2 \geq 0$ ve $(x+a)^2 \geq 0$ 'dır. Bu iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak,

$$x^2 + 2ax + a^2 + b^2 - a^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2ax + b^2 \geq 0$$

bulunur. Dolayısıyla denklemlerin sol tarafı pozitif olduğundan sağ tarafları da pozitiftir, yani $x_i \geq 0$ olur $(i = 1, 2, ..., n)$. Eğer $x_1 = x_2$ ise, eşitlikleri taraf tarafa çıkaralım.

$$x_3 - x_2 = (x_2^2 - x_1^2) + 2a(x_2 - x_1)$$

$$x_4 - x_3 = (x_3^2 - x_2^2) + 2a(x_3 - x_2)$$

$$\vdots$$

$$x_n - x_{n-1} = (x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2) + 2a(x_{n-1} - x_{n-2})$$

$$x_1 - x_n = (x_n^2 - x_{n-1}^2) + 2a(x_n - x_{n-1}) .$$

$x_1 = x_2$ durumunda eşitliklerden $x_1 = x_2 = ... = x_n$ bulunur. Eğer $x_2 > x_1$ ise, eşitliklerden

$$x_3 > x_2,\ x_4 > x_3,\ ...,\ x_n > x_{n-1},\ x_1 > x_n$$

bulunur.

Dolayısıyla $x_1 > x_n > x_{n-1} > ... > x_2 > x_1, x_1 > x_1$ çelişkisi elde edilir. $x_1 > x_2$ durumu da benzer şekilde yapılır.

$$x_1^2 + 2ax_1 + b^2 = x_1 \Rightarrow x_1^2 + (2a-b)x_1 + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1 - 2a \mp \sqrt{(1-2a)^2 - 4b^2}}{2} .$$

Karekök içinin pozitif olması için gerek ve yeter koşul

$$(1-2a)^2 - 4b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2a - 2b)(1 - 2a + 2b) \geq 0$$

'dır. $b \geq a > 0$ olduğundan $1 - 2a + 2b > 0$ 'dır.

Eğer $1 - 2a - 2b < 0$ ise, eşitsizlik sağlanmaz. Bu durumda sistemin çözümü olmaz.

Eğer $1 - 2a - 2b \geq 0$ ise,

$$x_1 = ... = x_n = \frac{1 - 2a + \sqrt{(1-2a)^2 - 4b^2}}{2},$$

$$x_1 = ... = x_n = \frac{1 - 2a - \sqrt{(1-2a)^2 - 4b^2}}{2}$$

çözümleri bulunur.

(b) Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği Yardımıyla Denklem Çözümü

Öncelikle aritmetik ortalama, geometrik ortalama ve harmonik ortalamayı hatırlayalım $(a_i \in \mathbb{R})$:

$$\text{A.O.} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

$$\text{G.O.} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n},$$

$$\text{H.O.} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}} .$$

Her $i \in \mathbb{N}$ için $a_i > 0$ ise, A.O. $\geq$ G.O. $\geq$ H.O. 'dır. Eşitlik durumu ise $a_1 = a_2 = ... = a_n$ olduğunda mümkündür.

Örnek 4: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3$ denkleminin doğal sayılarda çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $x, y, z \in \mathbb{N}$ olduğundan A.O.-G.O. eşitsizliğini

$$a_1 = \frac{x}{y},\quad a_2 = \frac{y}{z},\quad a_3 = \frac{z}{x}$$

alarak kullanalım:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3 .$$

Eşitlik durumu ise tüm terimlerin eşit olmasında mümkündür; $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 1$ olur. Buradan $x = y = z = a$ $(a \in \mathbb{N})$ olmalıdır. Çözüm kümesi (a, a, a) biçimindedir.

Örnek 5:

$$x+y+z+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{y-1}+\frac{3}{z-1}$$
$$=2(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2})$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz ($x,y,z>1$).

Çözüm: Öncelikle şöyle bir düzenleme yapalım:

$$x+\tfrac{3}{x-1}=x+1-1+\tfrac{3}{x-1}=x-1+\tfrac{x+2}{x-1}\quad(1)$$

$$y+\tfrac{3}{y-1}=y-1+\tfrac{y+2}{y-1},\quad z+\tfrac{3}{z-1}=z-1+\tfrac{z+2}{z-1}.$$

(1) 'de $a_1=x-1$, $a_2=\frac{x+2}{x-1}$ için A.O.-G.O. eşitsizliğini kullanırsak,

$$\frac{x-1+\frac{x+2}{x-1}}{2}\geq\sqrt{(x-1)\frac{(x+2)}{(x-1)}}$$

$$\Rightarrow x-1+\frac{x+2}{x-1}\geq 2\sqrt{x+2}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$y-1+\frac{y+2}{y-1}\geq 2\sqrt{y+2}, z-1+\frac{z+2}{z-1}\geq 2\sqrt{z+2}$$

bulunur. Denklemimizde eşitliğin olması için bu eşitsizliklerin eşitlik olması gerekir. Eşitlik durumu da terimlerin eşit olmasıyla mümkündür.

$$x-1=\tfrac{x+2}{x-1}\Rightarrow x^2-2x+1=x+2$$

$$\Rightarrow x^2-3x-1=0$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\tfrac{3\mp\sqrt{13}}{2}.$$

$\frac{3-\sqrt{13}}{2}<0$ olduğundan bu bir kök olamaz, çünkü $x,y,z>1$ 'dir. O halde çözüm kümesi $(\frac{3+\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2})$ olur.

Örnek 6:

$$x_1+x_2+...+x_n=9$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1$$

($x_i>0, n\in\mathbb{N}$) denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: A.O.-H.O. eşitsizliğinden,

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\geq\frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}$$

$$\Rightarrow\frac{9}{n}\geq\frac{n}{1},\Rightarrow 9\geq n^2,$$

$n>0\Rightarrow 3\geq n$.

(1) $n=1\Rightarrow x_1=9$ ve $\frac{1}{x_1}=1$ olmalıdır; bu ise mümkün değildir.

(2) $n=2\Rightarrow x_1+x_2=9$ ve $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$ 'dir. Böylece $x_1+x_2=x_1x_2\Rightarrow x_1x_2=9$ 'dur. x_1 ve x_2, t^2-9t+9 denkleminin kökleridir.

$$x_{1,2}=\frac{9\mp\sqrt{45}}{2}$$

(3) $n=3\Rightarrow x_1+x_2+x_3=9$ ve $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=1$ 'olur. Bu ise A.O.=H.O. demektir ki bu da terimlerin eşit olması durumunda mümkündür: $x_1=x_2=x_3=1$.

(c) Tamkısım Fonksiyonu ve Eşitsizlikler

$[\![x]\!]$, x 'ten küçük en büyük tamsayıdır. Bazı tamkısım fonksiyonlu problemler eşitsizliklerin yardımıyla çözülebilir.

Örnek 7: $x[\![x[\![x[\![x]\!]]\!]]\!]=88$ denkleminin pozitif reel sayılarda çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $x\geq 4\Rightarrow 4.4.4.4\leq x[\![x[\![x[\![x]\!]]\!]]\!]=88$ olur ki $256\leq 88$ mümkün degildir. Eğer $x\leq 3$ ise, $88=x[\![x[\![x[\![x]\!]]\!]]\!]\leq 3^4$ elde ederiz. $88\leq 81$ olur, çelişki çıkar.

Demek ki $3<x<4$ 'tür, $[\![x]\!]=3$ bulunur. $x[\![x[\![3x]\!]]\!]=88$ 'dir, $3<x\Rightarrow 9<3x$ olur. $3x>10$ olsaydı $88=x[\![x[\![3x]\!]]\!]>3[\![3.10]\!]=90$ olurdu. Dolayısıyla, $9<3x<10$ olur. $[\![3x]\!]=9$ elde edilir.

$x.[\![9x]\!]=88$, $9<3x\Rightarrow 27<9x<30$ olur. $[\![9x]\!]=29$ olsaydı, $30>9x\geq 29$ olması gerekirdi. Ama $9x=\frac{9.88}{29}=27,...$ 'dır.

$[\![9x]\!]=27$ olsaydı, $28>9x\geq 27$ olması gerekirdi. Ama $9x=\frac{9.88}{27}=29,...$, yani $[\![9x]\!]=$

29 olmalıdır. Buradan $x = \frac{22}{7}$ bulunur. Kontrol edildiğinde denklemin sağlandığı görülebilir.

Örnek 8:

$$y = \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10^6}}$$

ise, $[\![y]\!]$ kaça eşittir?

Çözüm: $\sqrt{k} < \sqrt{k+1} \Rightarrow 2\sqrt{k} < \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}, \qquad (1)$$

$\sqrt{k} > \sqrt{k-1} \Rightarrow 2\sqrt{k} > \sqrt{k-1} + \sqrt{k}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} > \frac{1}{2\sqrt{k}}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$= \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})}$$

$$= \sqrt{k} - \sqrt{k-1}\,.$$

(1) ve (2) 'den

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

Burada k yerine 9 'dan 10^6 'a kadar olan tamsayıları yazıp oluşan eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım:

$$\sqrt{10} - \sqrt{9} < \frac{1}{2\sqrt{9}} < \sqrt{9} - \sqrt{8}$$

$$\sqrt{11} - \sqrt{10} < \frac{1}{2\sqrt{10}} < \sqrt{10} - \sqrt{9}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{10^6+1} - \sqrt{10^6} < \frac{1}{2\sqrt{10^6}} < \sqrt{10^6} - \sqrt{10^6-1}$$

$$\sqrt{10^6+1} - 3 < \frac{1}{2} - y < \sqrt{10^6} - \sqrt{8}$$

elde edilir. Buradan $997 < \frac{1}{2}y < 997,172$ ve $1994 < y < 1994,344 \Rightarrow [\![y]\!] = 1994$ bulunur.

(d) Cauchy-Schwartz Eşitsizliğinin Yardımıyla Denklem Çözümü

Cauchy-Schwartz eşitsizliği: $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ için,

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leq$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}.\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$$

Eşitlik durumu $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$ olduğunda mümkündür.

Örnek 9:

$$(x + 4y + z + 5t)^2 = 43(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \quad (1)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 5157 \quad (2)$$

denklem sisteminin çözüm kümeşini bulunuz.

Çözüm: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ ve $y_1 = x$, $y_2 = y$, $y_3 = z$, $y_4 = t$ kabul edelim ve Cauchy-Schwartz eşitsizliğini uygulayalım:

$$1.x + 4.y + 1.z + 5.t \leq$$

$$\sqrt{4^2 + 5^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2},$$

$$x + 4y + z + 5t \leq \sqrt{43}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2},$$

$$(x + 4y + z + 5t)^2 \leq 43(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

Eşitlik durumu $\frac{1}{x} = \frac{4}{y} = \frac{1}{z} = \frac{5}{t} = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{R}$, durumunda mümkündür.

(2) 'de $x = k$, $y = 4k$, $z = k$, $t = 5k$ yazalım ($k \in \mathbb{R}$):

$$k^3 + 4^3k^3 + k^3 + 5^3k^3 = 5157\ .$$

Buradan $k = 3$ bulunur. Çözüm kümesi ise $(3, 12, 3, 15)$ olur.

Örnek 10: x, y, z sayıları $x^2 + y^2 + z^2 = 1993$ denklemini sağlayan pozitif tamsayılar olduğunda $x + y + z$ sayısının bir tamkare olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden,

$$x+y+z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$x+y+z \leq \sqrt{3}\sqrt{1993}, \text{ ve } x+y+z < 78 \text{ olur.}$$

Aksini varsayalım, $x+y+z$ bir tamkare olsun. O zaman $x+y+z$ 64, 49, 25, 16, 9, 36 sayılarından biri olmalıdır. Herhangi bir tamkare tek ise bunun kare kökü de bir tek tamsayıdır. Aynı şey çift sayılar için de geçerlidir. $x^2+y^2+z^2$ 'nin bir tek sayı olması için x, y ve z 'nin hepsinin tek olması veya ikisinin çift, birinin tek olmasıyla mümkündür. Bu da $x+y+z$ 'nin tek olmasını gerektirir. Dolayısıyla $x+y+z$, $64, 16$ ve 36 olamaz. $(x+y+z)^2 > x^2+y^2+z^2$ olduğu açıktır. $(x+y+z)^2 > 1993 > 625 \Rightarrow x+y+z > 25$ olduğundan, $x+y+z = 25$ ve 9 olamaz. $x+y+z = 49$ ise, $x^2+y^2 = 1993 - z^2$, $x+y = 49 - z$ olmalıdır.

$$(x+y)^2 > x^2+y^2 \Rightarrow (49-z)^2 > 1993 - z^2$$

$$\Rightarrow z^2 - 49z + 204 > 0 \ ,$$

$$z_{1,2} - \tfrac{49 \mp \sqrt{1585}}{2} \Rightarrow z > 43 \text{ olmalıdır.}$$

$z = 44 \Rightarrow x+y = 5$, $x^2+y^2 = 57$ sisteminin çözümü yoktur.

$z > 45 \Rightarrow z^2 > 1993$. Bu da $x^2+y^2+z^2 = 1993$ ile çelişir. Dolayısıyla koşulları sağlayan $x+y+z$ sayısı bir tamkare olamaz.

KAYNAKLAR

[1] Karakaş, H. İ., Aliyev, İ.; Sayılar Teorisinde Ilginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, TÜBİTAK, 1996.

[2] Kedlaya K., Mathematical Contests (1997-1998), 1998.

[3] Atabey S., 1.Dereceden İki ve Üç Bilinmeyenli Diofant Denklemler, Matematik Dünyası, Cilt:5, Sayı:1, 17-18 (1995).

[4] Atabey S., İki Üslü Diofant Denklemi, Matematik Dünyası, Cilt:5, Sayı:4, 23-24 (1995).

[5] Şirinoğlu N., Ertuğ, C. A.; Tamsayılar Kümesinde Denklemler, Matematik Dünyası, Cilt:6, Sayı:4, 8-13 (1996).

[6] Demir H.; Bazı Ortalamalar, Matematik Dünyası, Cilt:1, Sayı:1, 17-21 (1991).

[7] Çalışkan N.; Cebirsel Denklemlerin Kökleri, Matematik Dünyası, Cilt:4, Sayı:3, 9-13 (1994).