

ERDÖS 'ÜN BİR PROBLEMİ

Ogün Öge

Özel Selim Pars Lisesi, Florya/İSTANBUL

Giriş. P. Erdös, $k > 8$ ise 2^k sayısının 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamayacağını iddia etmiştir. Erdös 'ün bu problemi hala çözülememiştir [1]. Bu çalışmada Erdös 'ün iddiasının sonsuz sayıda k için doğru olduğunu gösterdik.

TEMEL SONUÇLAR:

$k > 8$ bir tamsayı olmak üzere 2^k 'nın 3 tabanına göre yazılışı:

$$2^k = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + a_{n-2} 3^{n-2} + \dots + a_j 3^j + a_{j-1} 3^{j-1} + \dots + a_1 + a_0 \quad (1)$$

olsun. Eğer bu yazılıшта bir i ($0 \leq i \leq n$) için $a_i = 2$ ise, 2^k sayısı 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamaz. O halde Erdös 'ün iddiası şuna denktir:

$k > 8$ olmak üzere,

$$2^k = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + a_{n-2} 3^{n-2} + \dots + a_1 3 + a_0$$

ise, a_i sayılarından en az biri 2 'dir.

Öncelikle (1) yazılışında $a_0 \neq 0$ 'dır. Çünkü $a_0 = 0$ için, $2^k = 3(a_n 3^{n-1} + \dots + a_1)$ olup buradan $3|2^k$ elde edilir ki bu mümkün değildir. Şimdi (1) yazılışında bir katsayı (varsayalım ki a_j $j \geq 1$ katsayısı) 2 olsun. (1) 'deki eşitliği $\text{mod } 3$ için yazarsak,

$$2^k \equiv a_j 3^j + a_{j-1} 3^{j-1} + \dots + a_1 3 + a_0 \equiv 2.3^j + a_{j-1} 3^{j-1} + \dots + a_1 3 + a_0 \pmod{3^{j+1}}$$

elde edilir.

Şimdi $t = 2.3^j + a_{j-1} 3^{j-1} + \dots + a_1 3 + a_0$ dersek, $2^k \equiv t \pmod{3^{j+1}}$ bulunur. Fakat $a_0 \geq 1$ 'den $t \geq 2.3^j + 1$ elde edilir. O halde şunu elde ederiz:

Sonuç 1: 2^k ($k > 8$) sayısının 3 tabanındaki (1) yazılışında 3^j 'nin katsayısı 2 ise,

$$2^k \equiv t \pmod{3^{j+1}}, \quad t \geq 2.3^j + 1$$

'dir.

Şimdi $k > 8$ olmak üzere bir j ($j \geq 1$) tamsayısı için

$$2^k \equiv t \pmod{3^{j+1}} \quad (2)$$

olup burada $t \geq 2.3^j + 1$ olsun. ($t < 3^{j+1}$ olduğunu kabul edebiliriz.) Kongrüans tanımından

$$2^k \equiv m.3^{j+1} + t \quad (3)$$

elde edilir. Burada $m > 0$ 'dır. Çünkü $m < 0$ olsa, $2^k \leq -3^{j+1} + 3^{j+1} - 1 < -1$ olur ki bu mümkün değildir. $m = 0$ da olamaz, çünkü bu durumda $2^k = t < 3^{j+1} < 2^k$ çelişkisi elde edilir. $m > 0$ sayısının 3 tabanına göre yazılışı

$$m = b_r 3^r + b_{r-1} 3^{r-1} + \dots + b_1 3 + b_0 \quad (0 \leq b_i \leq 2)$$

olsun. Bunu (3) 'te kullanarak,

$$2^k = b_r 3^{r+j+1} + b_{r-1} 3^{j+r} + \dots + b_0 3^{j+1} + t \quad (4)$$

elde edilir. t sayısının 3 tabanındaki yazılışı

$$t = c_s 3^s + \dots + c_1 3 + c_0 \quad (0 \leq c_i \leq 2) \quad (5)$$

olsun. Burada $c_s = 2$ ve $j = s$ olduğunu gösterelim. $j < s$ olamaz, çünkü $c_s \geq 1$ olduğundan $t \geq 1.3^{j+1}$ bulunur ki bu $t < 3^{j+1}$ ile çelişir. $s < j$ ise,

$$t \leq 2.3^{j-1} + 2.3^{j-2} + \dots + 2.3 + 2 = 2(1 + 3 + \dots + 3^{j-1}) = 2 \cdot \frac{3^j - 1}{3 - 1},$$

$t \leq 3^j - 1$ bulunur ki bu $t \geq 2.3^j + 1$ ile çelişir. $s = j$ olsun. Bu durumda $c_s = 2$ olmalıdır. Aksi takdirde, $c_s = 1$ ise,

$$t \leq 3^j + 2.3^{j-1} + 2.3^{j-2} + \dots + 2.3 + 2 = 3^j + 2(1 + 3 + \dots + 3^{j-1}) = 3^j + 2 \cdot \frac{3^j - 1}{3 - 1},$$

$t \leq 2.3^j - 1$ bulunur ki bu da $t \geq 2.3^j + 1$ ile çelişir. O halde (5) 'teki yazılış

$$t = 2.3^j + c_{j-1} 3^{j-1} + \dots + c_1 3 + c_0$$

olup bunu (4) 'te kullanarak

$$2^k = b_r 3^{r+j+1} + \dots + b_0 3^{j+1} + 2.3^j + \dots + c_1 3 + c_0$$

bulunur ki bu bize 3 tabanına göre yazılışında en az bir basamağın (sondan $(j + 1)$. basamağın) 2 olduğunu gösterir. Diğer yandan, $2^k \equiv 2 \pmod{3}$ ise, bu bize $2^k \equiv a_n 3^n + \dots + a_1 3 + 2$ olduğunu gösterir ki burada da birler basamağı 2 'dir. O halde şu teoremi elde ederiz:

Teorem 1. $k > 8$ bir tamsayı olmak üzere 2^k 'nın 3 tabanına göre yazılışında en az bir basamağın 2 olması için gerek ve yeter koşul,

$$\begin{aligned} 2^k &\equiv t_1 \pmod{3} & t_1 &= 2 \\ 2^k &\equiv t_2 \pmod{3^2} & t_2 &\geq 2.3 + 1 \\ 2^k &\equiv t_3 \pmod{3^3} & t_3 &\geq 2.3^2 + 1 \\ &\vdots & & \\ 2^k &\equiv t_j \pmod{3^j} & t_j &\geq 2.3^{j-1} + 1 \\ &\vdots & & \\ 2^k &\equiv t_q \pmod{3^q} & t_q &\geq 2.3^{q-1} + 1 \end{aligned} \quad (6)$$

kongrüanslarından en az birinin sağlanmasıdır. (Burada q tamsayısı $3^{q+1} > 2^n > 3^q$ koşulunu gerçekleyen pozitif sayıdır.)

Şimdi bazı k değerleri için (6) 'daki kongrüanslardan bazılarının sağlandığını göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki teoremi kullanacağız:

Teorem 2. (Euler) $(a, m) = 1$ ($a \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$, $m \geq 1$) olmak üzere $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ 'dir.

$m = 3^2$ için Euler Teoremini uygularsak, $\varphi(3^2) = 2.3^{2-1} = 6$ olduğundan $2^6 \equiv 1 \pmod{3^2}$ elde edilir. Kongrüansların özelliklerinden $2^6 \equiv 1 \pmod{3}$ olduğu da çıkar. Şimdi 2^k ($k > 8$) sayısını 6 ile bölelim. $k = 6n + j$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{aligned}
j=0 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n} \equiv 1 \pmod{3}, & t_1 &= 1 \neq 2; \\
j=1 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n+1} \equiv 2 \pmod{3}, & t_1 &= 2; \\
j=2 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n+2} \equiv 1 \pmod{3}, & t_1 &= 1 \neq 2; \\
j=3 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n+3} \equiv 2 \pmod{3}, & t_1 &= 2; \\
j=4 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n+4} \equiv 1 \pmod{3}, & t_1 &= 1 \neq 2; \\
j=5 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n+5} \equiv 2 \pmod{3}, & t_1 &= 2
\end{aligned}$$

bağıntılarını elde ederiz. Yine $\text{mod } 3^2$ 'yi kullanarak,

$$\begin{aligned}
j=0 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n} \equiv 1 \pmod{3^2} & 1 &\not\geq 2.3 + 1 \\
j=1 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n+1} \equiv 2 \pmod{3^2} & 2 &\not\geq 2.3 + 1 \\
j=2 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n+2} \equiv 4 \pmod{3^2} & 4 &\not\geq 2.3 + 1 \\
j=3 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n+3} \equiv 8 \pmod{3^2} & 8 &\geq 2.3 + 1 \\
j=4 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n+4} \equiv 7 \pmod{3^2} & 7 &\geq 2.3 + 1 \\
j=5 \text{ için } 2^k &\equiv 2^{6n+5} \equiv 5 \pmod{3^2} & 5 &\not\geq 2.3 + 1
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde Teorem 1 'den dolayı şu sonuca elde ederiz:

Sonuç 2. $k > 8$ bir tamsayı olmak üzere, $k = 6n + 1, 6n + 3, 6n + 4, 6n + 5$ formunda ise, 2^k sayısı 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamaz.

Bu formda olan pozitif sayıların sayısı sonsuz olduğundan şunu elde ederiz:

Sonuç 3. Sonsuz sayıda k için Erdös 'ün iddiası doğrudur.

Şimdi $m = 3$ için Euler Teoremini uygularsak $\varphi(3^3) = 2.3^2 = 18$ olup, $2^{18} \equiv 1(3^3)$ bulunur. Bunu kullanarak $k = 18n + j$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots, 17$ olmak üzere

$$\begin{array}{llll}
j=0 \text{ için} & 2^k \equiv 1 \pmod{3}, & 2^k \equiv 1 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 1 \pmod{3^3} \\
j=1 \text{ için} & 2^k \equiv 2 \pmod{3}, & 2^k \equiv 2 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 2 \pmod{3^3} & (*) \\
j=2 \text{ için} & 2^k \equiv 1 \pmod{3}, & 2^k \equiv 4 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 4 \pmod{3^3} \\
j=3 \text{ için} & 2^k \equiv 2 \pmod{3}, & 2^k \equiv 8 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 8 \pmod{3^3} & (*) \\
j=4 \text{ için} & 2^k \equiv 1 \pmod{3}, & 2^k \equiv 7 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 16 \pmod{3^3} & (*) \\
j=5 \text{ için} & 2^k \equiv 2 \pmod{3}, & 2^k \equiv 5 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 5 \pmod{3^3} & (*) \\
j=6 \text{ için} & 2^k \equiv 1 \pmod{3}, & 2^k \equiv 1 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 10 \pmod{3^3} \\
j=7 \text{ için} & 2^k \equiv 2 \pmod{3}, & 2^k \equiv 2 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 20 \pmod{3^3} & (*) \\
j=8 \text{ için} & 2^k \equiv 1 \pmod{3}, & 2^k \equiv 4 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 13 \pmod{3^3} \\
j=9 \text{ için} & 2^k \equiv 2 \pmod{3}, & 2^k \equiv 8 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 26 \pmod{3^3} & (*) \\
j=10 \text{ için} & 2^k \equiv 1 \pmod{3}, & 2^k \equiv 7 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 25 \pmod{3^3} & (*) \\
j=11 \text{ için} & 2^k \equiv 2 \pmod{3}, & 2^k \equiv 5 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 23 \pmod{3^3} & (*) \\
j=12 \text{ için} & 2^k \equiv 1 \pmod{3}, & 2^k \equiv 1 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 19 \pmod{3^3} & (*) \\
j=13 \text{ için} & 2^k \equiv 2 \pmod{3}, & 2^k \equiv 2 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 11 \pmod{3^3} & (*) \\
j=14 \text{ için} & 2^k \equiv 1 \pmod{3}, & 2^k \equiv 4 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 22 \pmod{3^3} & (*) \\
j=15 \text{ için} & 2^k \equiv 2 \pmod{3}, & 2^k \equiv 8 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 17 \pmod{3^3} & (*) \\
j=16 \text{ için} & 2^k \equiv 1 \pmod{3}, & 2^k \equiv 7 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 7 \pmod{3^3} & (*) \\
j=17 \text{ için} & 2^k \equiv 2 \pmod{3}, & 2^k \equiv 5 \pmod{3^2}, & 2^k \equiv 14 \pmod{3^3} & (*)
\end{array}$$

Bu tabloda "(*)" ile gösterilenlerde Teorem 2 'deki kongrüanslardan en az biri sağlanır. Bunların sayısı 14 tanedir. O halde şunu elde edebiliriz:

Teorem 3. $k > 8$ ve $k = 18n + j$, ($j \neq 0, 2, 6, 8$) için 2^k , 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamaz.

Şimdi $N > 8$ bir tamsayı olsun. $k = 18n + j$, $0 \leq j \leq 17$ ise, bu formda olan ve $8 < k \leq N$ koşulunu gerçekleyen sayıların sayısını bulalım.

$$8 < 18n + j \leq N \text{ ve } 1 \leq \frac{8-j}{18} < n \leq \frac{N-j}{18} < \frac{N}{18} - 1$$

olup bu formda olan sayıların sayısı en az $\frac{N}{18} - 1$ 'dir. O halde bunu kullanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 4. $N > 8$ olmak üzere $8 < k \leq N$ koşulunu gerçekleyen sayıların en az $\frac{14}{18}N - 14$ tanesi için Erdös 'ün iddiası doğrudur.

Euler formülünü 3^t ($t > 3$) için kullanırsak Teorem 4 'teki $\frac{14}{18}$ oranının daha da büyük olacağı sezilmektedir.

Böylece bu çalışmada Erdös 'ün bu iddiasının k 'nın belirli sonsuz formlarda olması halinde doğru olduğu sonucunu elde ettik. Bu bulgu Erdös 'ün bu iddiasının doğru olduğu savını kuvvetlendirmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Richard, K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag (1994).

BİR BOYAMA PROBLEMİNDE "FERMAT SÜRPRİZİ"

p sayısı asal olmak üzere, bir daire p tane eşit dilime bölünmüştür. Verilmiş n rengi kullanarak dilimleri boyuyoruz. (Her dilim, sadece, bir renk kullanılarak boyanıyor!) Dairenin dönmesiyle çıkan durumları bir kez saymak koşuluyla, dairenin kaç farklı boyanmasını elde etmek mümkündür?

Çözüm. Her dilimi n tane rengin herhangi biri ile boyayabileceğimizden, daire için n^p tane boyama elde ederiz, ve bunlardan $n^p - n$ tanesinde en az iki renk kullanılmıştır. Dönmeler sonucu çıkan durumları bir kez saymak durumunda olduğumuzdan, en az iki rengin kullanılmış olduğu farklı boyama sayısı $\frac{n^p - n}{p}$ olacaktır. Bu sayıya, sadece bir renk kullanılarak yapılan boyama sayısını (yani n sayısını) da eklersek, $\frac{n^p - n}{p} + n$ sayısı problemde bulunması istenen sayı olur.

Bu formülden görüldüğü gibi, p 'nin asal olması halinde $n^p - n$ sayısı p 'ye tam bölünür. İşte size Fermat 'nın "Küçük Teoremi"!