MÜKEMMEL SAYILAR

Halil İ. Karakaş
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Küçük yaşlardan beri aşina olduğumuz en basit matematiksel kavramlardan biri sayma sayıları ya da pozitif tamsayılardır. Bu sayıların çok basit bir kuralla, 1 'in ardarda toplanmasıyla üretildikleri düşünülebilir. Bununla beraber, bu sayılardan her birinin, o sayıya özel bir konum sağlayan ilginç özellikleri vardır. Binyıllarca öncesinin matematikçileri bu tür özellikleri keşfetmek için uğraş vermişlerdir ki, onların aritmetik olarak adlandırılan çalışmaları bugünün sayılar teorisinin temelini oluşturmaktadır.

Aritmetik problemlerinin pek çoğunun ifadesi şaşkınlık yaratacak derecede basit, fakat çözümleri ifadedeki basitlikle ters orantılı olarak zordur. Bu problemlere örnek olan "Fermat" 'ın son teoremi ve "Goldbach Sanısı" (conjecture) neredeyse sokakta rastladığımız her insanın anlayabileceği ifadelere sahiptir.

Henüz çözülememiş pek çok probleme konu olan ve bin yıllardır ilgi çeken sayı türlerinden biri de bu yazımıza konu teşkil eden mükemmel sayılardır.

Kendisinden küçük tüm pozitif bölenlerinin toplamına eşit olan bir (pozitif) tamsayıya **mükemmel sayı** denir. **Öklid** 'in "Elementler" 'inde (VII, VIII ve IX. kitaplar) yer verilen mükemmel sayılarla doğulu matematikçilerden **Ibn-el Heitham** ve ünlü **L. Euler** gibi pek çok matematikçi ilgilenmiştir. Öklid 'in kitabında çift mükemmel sayılar için (o zaman her mükemmel sayının çift olduğu düşünülüyordu...) bir algoritma verilmiştir. Ibn-el Heitham' ın da üzerinde çalıştığı ve Euler tarafından ispatlanan bu algoritma, yazımız içinde açıklanacaktır.

Mükemmel sayılarla ilgilenmiş olan eski matematikçilerden biri de Gerassa 'lı Nikomakus (Nicomachus) 'tur. Nikomakus, **Introductio Arithmetica** adlı kitabında üç tür sayıdan bahseder: Eksik (deficient) sayılar, mükemmel (perfect) sayılar ve artık (abundant) sayılar. Bir sayının kendisinden küçük tüm pozitif bölenlerinin toplamı o sayıdan küçük ise, o sayıya bir eksik sayı; eğer bu toplam o sayıdan büyük ise, sözü edilen sayıya bir artık sayı denir. Başka bir deyimle, artık sayılar, pek çok pozitif bölene sahip olan; eksik sayılar ise, pozitif bölen yönünden fakir olan sayılardır. Mükemmel sayılar, bu iki çeşit sayı arasında bir tür denge ifade etmektedir. 2 'nin her pozitif kuvveti (örneğin 2, 4...) bir eksik sayı, 6 bir mükemmel sayı ve 12 bir artık sayıdır.

Mükemmel sayılar hakkında eski çağlardan beri süregelen ilgi nereden kaynaklanmaktadır? Bu ilgi, mükemmel sayılarla ilgili bilgilerin sağlayabileceği pratik faydalar veya başka problemlerin çözümüne sağlayacağı katkılardan çok kendi içindeki harmoni ve güzellikten kaynaklansa gerektir.

Nikomakus, "Introductio Arithmetica" adlı kitabında aşağıdaki iddialarda bulunmuştur:

1. Her $i \geq 0$ için 10^i ile 10^{i+1} arasında bir ve yalnız bir mükemmel sayı vardır.

2. Her mükemmel sayı çifttir.

3. Her mükemmel sayı (dönüşümlü olarak) ya 6 veya 8 ile biter.

4. Her mükemmel sayı, uygun bir $t \geq 1$ için $2^t(2^{t+1} - 1)$ biçimindedir.

5. Sonsuz çoklukta mükemmel sayı vardır.

Nikomakus'un bu beş iddiadan hiçbirini tam olarak kanıtlamadığı anlaşılmaktadır. Bu iddialardan (1) ve (3) 'ün yanlış olduğu bilinmektedir. Zira, 10000 ile 10000000 arasında hiçbir mükemmel sayı bulunmamakta ve beşinci mükemmel sayı ile altıncı mükemmel sayının son basamaklarında 6 bulunmaktadır. Diğer üç iddia ne ispatlanabilmiş ne de çürütülebilmiştir. Ancak, daha önce belirtildiği gibi, (4) 'te verilen iddianın çift mükemmel sayılar için doğru olduğu Euler tarafından ispatlanmıştır.

Bundan sonraki tartışmalarımızda kolaylık sağlaması bakımından, bir n sayısının tüm pozitif bölenlerinin toplamını $\sigma(n)$ ile göstereceğiz. Bu gösterimle, n'nin mükemmel olması için gerek ve yeter koşul; $\sigma(n) - n = n$, ya da buna denk olarak, $\sigma(n) = 2n$ olmasıdır. (Euler, mükemmel sayıyı böyle tanımlamıştır.)

Bu şekilde tanımlanan σ fonksiyonunun çarpımsal olduğu; yani, m ve n aralarında asal ise, $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ olduğu bilinmektedir ([2], sayfa 95).

Şimdi, her çift mükemmel sayının uygun bir $t \geq 1$ için $2^t(2^{t+1} - 1)$ biçiminde olduğu önermesi için Euler 'in verdiği ispatı görelim.

$2^{t+1} - 1$ biçimindeki sayılara **Mersenne sayıları** denir. Euler 'in ispatında da görüleceği gibi, s tek ve $t \geq 1$ olmak üzere $2^t.s$ biçiminde bir çift sayının mükemmel olması için gerek ve yeter koşul, $s = 2^{t+1} - 1$ ve s 'nin asal (Mersenne asalı) olmasıdır. Dolayısıyla, çift mükemmel sayıların varlığı, Mersenne asallarının varlığına denktir. Mersenne asallarının sonlu mu yoksa sonsuz çoklukta mı olduğu bilinmemektedir.

$2^t s$, $t \geq 1$, sayısının mükemmel olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \sigma(2^t s) = 2^{t+1}s &\Rightarrow \sigma(2^t)\sigma(s) = 2^{t+1}s \\ &\Rightarrow (2^{t+1} - 1)\sigma(s) = 2^{t+1}s \\ &\Rightarrow (2^{t+1} - 1),\ s \text{ yi böler ve } \sigma(s) = 2^{t+1}\frac{s}{2^{t+1} - 1} \qquad (*) \end{aligned}$$

'dir. $s = c \cdot (2^{t+1} - 1)$, $c \geq 1$ olsun. O zaman, $(*)$ 'dan,

$$c \cdot 2^{t+1} = \sigma(s) = \sigma(c \cdot (2^{t+1} - 1)) \geq c \cdot \sigma(2^{t+1} - 1)$$

ve buradan

$$2^{t+1} \geq \sigma(2^{t+1} - 1) \qquad (**)$$

olduğu görülür. Eğer $2^{t+1} - 1$ asal değil ise,

$$\sigma(2^{t+1} - 1) > 2^{t+1}$$

olacağından, $(**)$ 'ın ancak $2^{t+1} - 1$ 'in asal olması durumunda ve eşitlik olarak sağlanması gerektiği görülür. Diğer taraftan, $c = 1$ olmak zorundadır; çünkü $c > 1$ olması durumunda

$$\begin{aligned} \sigma(s) = \sigma(c \cdot 2^{t+1}) &= 1 + c + (2^{t+1} - 1) + c \cdot (2^{t+1} - 1) \\ &= 2^{t+1} + c \cdot 2^{t+1} > c \cdot 2^{t+1} \end{aligned}$$

olur ki, bu, $(*)$ ile çelişir. Sonuç olarak, $2^t \cdot s$ mükemmel ise, s asal ve $s = 2^{t+1} - 1$ 'dir. Karşıt olarak, $2^{t+1} - 1$ asal ise,

$$\begin{aligned}\sigma(2^t(2^{t+1}-1)) &= \sigma(2^t)\sigma(2^{t+1}-1)\\ &= (2^{t+1}-1)\cdot 2^{t+1} = 2(2^t(2^{t+1}-1))\end{aligned}$$

olur ve $2^t(2^{t+1} - 1)$ 'in mükemmel olduğu görülür.

Çift mükemmel sayılar için kanıtlanan bu algoritma, çift mükemmel sayıların miktarı hakkında fazla bir şey ifade etmemektedir. Daha önce de belirtildiği gibi, bu doğrultuda bilinenler, Mersenne asalları hakkında bilinenler kadardır. $2^{t+1} - 1$ 'in asal olması için $(t + 1)$ 'in asal olması gerektiği (fakat yetmediği) bilinmektedir. $2^p - 1$ 'in asal olduğu p asal sayılarından bazıları şunlardır:

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217,

4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, ..., 216091, ...

Yukarıdaki listeden de görülebileceği üzere, çift mükemmel sayılar hızla büyümektedir. Örneğin, listede görülen son Mersenne asalına karşılık gelen

$$2^{216090}(2^{216091} - 1)$$

mükemmel sayısının ondalık ifadesi neredeyse dergimizin bir sayısının tüm sayfalarını dolduracak büyüklüktedir.

Tek mükemmel sayılara gelince... Böyle bir sayının var olup olmadığı henüz bilinmemektedir. Eğer böyle bir sayı varsa, bu sayının 10^{200} 'den büyük olması gerektiği ve farklı asal çarpanlarının sayısının 8 'den az olamayacağı ispatlanmıştır.

Tek mükemmel sayıların mevcut olduğunu farzedelim ve

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

bir tek mükemmel sayının asal ayrışımı olsun. Burada her bir asal çarpanın tek (çift değil) olduğu ve

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2}) \cdots \sigma(p_r^{\alpha_r}) = 2n = 2p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

olacağı açıktır. Her p asal sayısı ve $\alpha \geq 1$ için

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + \ldots + p^{\alpha-1} + p^\alpha$$

sayısı α tek olunca çift ve α çift olunca tek olduğundan, n 'nin asal çarpanlara ayrılışında $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ üslerinden bir tanesi tek ve geri kalanların hepsi çift olmalıdır. Gerekisirse sıralamayı değiştirerek α_1 'in tek olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda, $\sigma(p_1^{\alpha_1})$ çift, her $i \geq 2$ için $\sigma(p_i^{\alpha_i})$ tek olur; $p_1 = 4k + 1$, $k \geq 1$ ve $\alpha_1 = 4\beta + 1$, $\beta \geq 0$ olacağı da gösterilebilir. Gerçekten, bir tek sayı olan α_1 ya $4\beta + 1$ veya $4\beta - 1$, $\beta \geq 0$ biçimindedir. Eğer $\alpha_1 = 4\beta - 1$ olsaydı,

$$\begin{aligned}\sigma(p_1^{\alpha_1}) &= 1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{4\beta-1}\\ &= (1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{4\beta-2}) + (p_1 + p_1^3 + \ldots + p_1^{4\beta-1})\\ &= (1 + p_1)(1 + p_1^2 + p_1^4 + \ldots + p_1^{4\beta-2})\end{aligned}$$

ifadesinde çarpanların ikisi de çift olacağından (ikinci çarpanda tam 2β tane tek toplanan olduğuna dikkat ediniz), $\sigma(n)$ 'nin 4 'ün katı olması gerekirdi ki, bu, $\sigma(n) = 2n$ olması ile çelişirdi. Böylece, $\alpha_1 = 4\beta + 1$; $\beta \geq 0$, olduğunu görmüş oluyoruz. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\sigma(p_1^{4\beta+1}) &= 1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{4\beta+1} \\ &= (1 + p_1)(1 + p_1^2 + p_1^4 + \ldots + p_1^{4\beta})\end{aligned}$$

ifadesinde, eğer $p_1 = 4k - 1$, $k \geq 1$ olsaydı, son ifadeden anlaşılacağı üzere $1 + p_1 = 4k$ ve dolayısıyla, $\sigma(n)$ 'nin 4 'ün bir katı olması gerekirdi ki, bu; $\sigma(n) = 2n$ ile çelişirdi. Demek ki, $p_1 = 4k + 1$, $k \geq 0$, biçiminde olmalıdır. Bir kez daha ifade edersek, eğer bir tek mükemmel sayı varsa, bu sayı, $4k + 1$, $k \geq 0$, bir asal sayı, A bir tek sayı ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere,

$$(4k + 1)^{4\alpha+1} \cdot A^2$$

biçiminde olmalıdır. Fakat unutmayalım ki, henüz böyle bir mükemmel sayının var olup olmadığı bilinmemektedir.

Yazımızı üzerinde çalışabileceğiniz 3 alıştırma ile bitirelim:

1. Her çift mükemmel sayının son basamağında ya 6 ya da 8 bulunduğunu kanıtlayınız. (Bunun için, 2 'nin pozitif kuvvetlerinin son basamağında, dönüşümlü olarak, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... bulunduğunu kullanabilirsiniz.)

2. Bir mükemmel sayının tüm pozitif bölenlerinin (çarpımsal) terslerinin toplamının 2 olduğunu gösteriniz. Örneğin, 6 mükemmel sayısının pozitif bölenleri 1, 2, 3, 6; bunların terslerinin toplamı,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$$

'dir.

3. Sadece üç veya daha az asal çarpanı bulunan bir tek sayının mükemmel olamayacağını gösteriniz.

KAYNAKLAR

1. Guy, R.K.; Unsolved Problems in Number Theory; Springer-Verlag, New York, 1981.

2. Kaya, A.; Sayılar Kuramına Giriş; Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İzmir, 1988.

3. Ribenboim, P.; The Little Book of Big Primes, Springer-Verlag, New York, 1991.

4. The Inter-Irem Commission; History of Mathematics Histories of Problems, Ellipses, Paris, 1997.

5. Wagon, S.; Perfect Numbers, The Mathematical Intelligencer, 7,2,1985, 66-68.