

## BİR MATEMATİKSEVERİN ÜÇ GEOMETRİ PROBLEMİ

Cem Tezer  
ODTÜ, Matematik Bölümü,  
06531-ANKARA

Bu kısa yazıda, tıp, edebiyat ve fikir hayatımıza hizmet vermiş ve bugün sıhhi sebeplerden dolayı verimli çalışması mümkün olmayan Dr. Cemil Uğurlu'yu tanıtmak istiyorum.

Dr. M. Cemil Uğurlu, 1926 yılında doğmuş, tıp tahsilini müteakip fizik tedavi sahasında ihtisas yapmıştır. Fizik tedavi, histoloji ve deontoloji dallarında yürüttüğü çalışmaların yanısıra gazete ve dergilerde yayınlanan muhtelif fikir ve inceleme yazıları kaleme almıştır. Bir şiir kitabı basılmıştır.

Bir kaç ay önce bir konuşma yapmak maksadıyla Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi'nde bulduğum sırada, meslektaşım Prof. Dr. Öner Çakar bana perişan evrak halinde bazı metinler vererek incelememi rica etti. Bunlar, hayranlıkla bağlı olduğu M. K. Atatürk hakkındaki yazılarından ismen tanıdığım Dr. M. Cemil Uğurlu tarafından 1946 yılında, yani liseyi henüz bitirdiği bir çağda tanzim edilmiş ve kısmen çözülmüş dört geometri problemini ihtiva etmekteydi. Bu çalışma, nasıl bakılırsa bakılsın olağanın çok dışında bir istidatın deliliydi. Yayınlamak için Dr. Uğurlu'dan izin aldım. Bu problemlerden üçünü aşağıda sunuyorum.

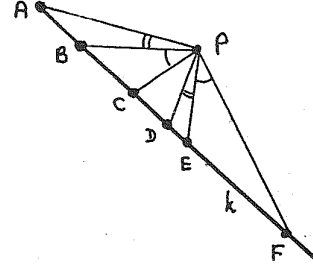
Bu yazıyı yazmaktan maksadım okuyuculara ilginç bir kaç geometri problemini sunmak, bir o kadar da, ne yazık ki değerlendirememiş bir kabiliyetin hazin hikayesini anlatmaktır.

### PROBLEM 1

Bir  $k$  doğrusu ve  $k$  üzerinde bulunmayan bir  $P$  noktası verilsin.  $k$  üzerinde alınan birbirinden farklı  $A, B, C, D, E, F$  noktaları  $\hat{A}PD = \hat{B}PE = \hat{C}PF = 90^\circ$  şartını sağlıyorsa,

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = -1$$

olduğunu gösteriniz.



**Çözüm:**  $P$  noktası,  $k$  doğrusu ve  $k$  üzerindeki noktalar şekilde görüldüğü konumlarda (Şekil 1) alınırsa elde edilecek olan

$$(\hat{A}PB) = (\hat{D}PE)$$

$$(\hat{B}PC) = (\hat{E}PF)$$

$$(\hat{A}PF) + (\hat{C}PD) = 180^\circ$$

bağıntıları muvacehesinde,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{|PA| \cdot |PB| \cdot \sin(\hat{A}PB)}{|PB| \cdot |PC| \cdot \sin(\hat{B}PC)}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{|PC| \cdot |PD| \cdot \sin(\hat{C}PD)}{|PD| \cdot |PE| \cdot \sin(\hat{D}PE)}$$

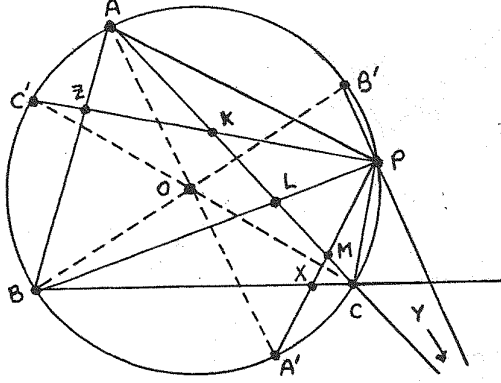
$$\frac{EF}{FA} = \frac{|PE| \cdot |PF| \cdot \sin(\hat{E}PF)}{|PF| \cdot |PA| \cdot \sin(\hat{F}PA)}$$

eşitliklerinin taraf tarafa çarpılmasıyla istenilen netice elde edilir.

### PROBLEM 2

$ABC$  üçgeninin çevrel çemberi üzerinde bir  $P$  noktası alınsın.  $PA, PB, PC$  doğrularına  $P$ 'den çizilen dikmeler  $BC, CA, AB$  doğrularını sırasıyla  $X, Y, Z$  noktalarında kessin.  $X, Y$  ve  $Z$ 'nin çevrel çember merkezinden geçen bir doğru

üzerinde kaldığını gösteriniz.



**Çözüm:**  $ABC$  çemberinin çevrel çember merkezini  $O$  ile gösterelim.  $[A, A']$ ,  $[B, B']$ ,  $[C, C']$  çap olacak şekilde çevrel çember üzerinde  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  noktaları alalım (Şekil 2). Tabii ki,  $X, Y, Z$  noktaları  $PA'$ ,  $PB'$ ,  $PC'$ 'nün sırasıyla  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ 'yi kestiği noktalar olacaktır.  $PC'$ ,  $PB$   $PA'$ 'nün  $AC$ 'yi kestikleri noktaları sırasıyla  $K, L, M$  ile gösterelim.

Menelaus Teoremini  $ABL$  üçgeni ve  $KZ$  kesenine uygulayarak

$$\frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{PB}{PL} \cdot \frac{KL}{KA} = 1$$

$BLC$  üçgeni ve  $MX$  kesenine uygulayarak da

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{MC}{ML} \cdot \frac{PL}{PB} = 1$$

bulunur. Bu denklemlerin Problem 1'den elde edilecek olan

$$\frac{AK}{KL} \cdot \frac{LM}{MC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$$

denklemleriyle taraf tarafa çarpılmasıyla

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$$

bulunur. Bu da Menelaus Teoremi vasıtasıyla  $X, Y$  ve  $Z$ 'nin doğruduş olduğunu gösterir.

$X, Y$ , ve  $Z$ 'nin üzerinde bulunduğu doğrunun  $O$ 'dan geçtiğinin ispatı Dr. Uğurlu'nun notları arasında yok. Benim çözümlüm projektif geometri yöntemlerine dayanıyor:

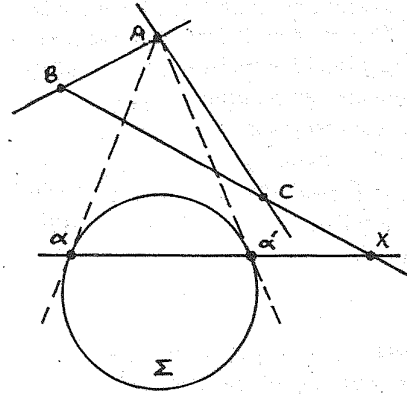
$P$ 'nin çevrel çember üzerinde hareket ettiği farz olunarak  $X$  ve  $Z$ 'nin sırasıyla  $BC$  ve  $BA$  doğruları üzerinde projektif bir münasebet içinde oldukları görülür.  $X$ 'in  $B$  ile çakışması halinde  $Z$  de  $B$  ile çakışacağından,  $XZ$  sabit bir noktadan geçmelidir.  $X$ 'in  $C$  ile çakışması halinde  $XZ$  de  $CC'$  ile çakışır. Diğer taraftan,  $X$ 'in  $AA'$  ile  $BC$ 'nin kesişim noktasıyla çakışması halinde de  $XZ$  doğrusu  $AA'$  ile çakışır. Demek ki aranan sabit nokta,  $AA'$  ile  $CC'$ 'nün kesişim noktası yani  $O$  olmalıdır.

### PROBLEM 3

Bir  $\Sigma$  çemberi ve köşeleri  $\Sigma$ 'nin dışında kalan bir  $ABC$  üçgeni alımsın.  $A, B, C$ 'den  $\Sigma$ 'ya çizilen teğetlerin değme noktaları sırasıyla  $\alpha$  ve  $\alpha'$ ,  $\beta$  ve  $\beta'$ ,  $\gamma$  ve  $\gamma'$  olsun.  $BC$  ve  $\alpha\alpha'$ ,  $CA$  ve  $\beta\beta'$ ,  $AB$  ve  $\gamma\gamma'$  doğruları sırasıyla  $X, Y, Z$  noktalarında kesişsin.

(1)  $X, Y$  ve  $Z$  noktalarının bir doğru üzerinde kaldığını gösteriniz.

(2)  $\beta\gamma'$  ve  $\beta'\gamma$  doğrularının  $BC$  üzerinde kesiştiğini gösteriniz.



### Çözüm:

Bu problemin çözümü de Dr. Uğurlu'nun notları arasında bulunamadı. Aslında  $\Sigma$  çemberi yerine herhangi bir koni kesiti (elips, hiperbol, parabol) alınabileceği gibi  $A, B, C$  noktalarının  $\Sigma$ 'ya göre konumları da oldukça serbestçe seçilebilir (Şekil 3). Aslında  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$  doğruları sırasıyla  $A, B, C$ 'nin  $\Sigma$ 'ya göre kutupluk doğruları ("polar line", "polaire", "Polare", "kutbiyye") olarak

tarif edilmelidir. Böylece,  $\Sigma$  verildiğinde, problemin manalı olabilmesi için  $A$ ,  $B$  ve  $C$  noktalarının kutupluk doğrularının sırasıyla  $BC$ ,  $CA$  ve  $AB$  doğrularından farklı olmaları kafi'dir. (Paralel olmaları halinde kesişme noktalarını "sonsuzda" addetmek yetecektir.) Bu şekilde olgunlaştırdıktan sonra problemi homojen koordinatlar yardımıyla çözebiliriz:

(1) Her nokta sıfırdan farklı  $3 \times 1$  bir matrisle, yani bir sütun vektörle, gene her doğru  $1 \times 3$  bir matrisle, yani bir satır vektörle gösterilecektir. Transpozisyon işlemi üst olarak yazılan bir  $T$  harfiyle belirtildiği takdirde  $\Sigma$ 'nin denklemi  $P^T \Omega P = 0$  şeklinde olacaktır. Burada

$$\Omega = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

bakışık bir matris olup, determinantı sıfırdan farklıdır. Kolaylık olması için

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yazmak suretiyle  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  doğrularının da sırasıyla

$$[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$$

olduğu görülür. Bu şartlar altında  $A$ ,  $B$ ,  $C$ 'nin kutupluk doğruları, yani  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$  doğruları

$$A^T \Omega = [a_{11}, a_{12}, a_{13}], \quad B^T \Omega = [a_{21}, a_{22}, a_{23}],$$

$$C^T \Omega = [a_{31}, a_{32}, a_{33}]$$

olarak verilecektir.  $BC \neq \alpha\alpha'$ ,  $CA \neq \beta\beta'$ ,  $AB \neq \gamma\gamma'$  olduğundan,  $(a_{12}, a_{13}) \neq (0, 0)$ ,  $(a_{21}, a_{23}) \neq (0, 0)$ ,  $(a_{31}, a_{32}) \neq (0, 0)$  dir. Bu yüzden,  $BC$  ve  $\alpha\alpha'$ 'nin kesiştiği nokta olarak

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{13} \\ a_{12} \end{bmatrix}$$

benzer şekilde de

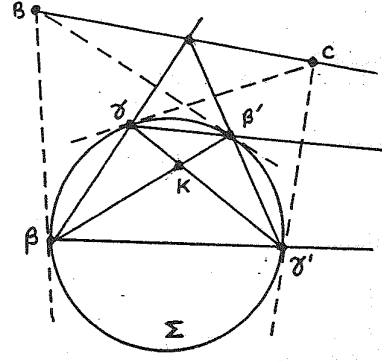
$$Y = \begin{bmatrix} a_{23} \\ 0 \\ -a_{22} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} a_{33} \\ -a_{31} \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Nihayet

$$\det[X, Y, Z] = \det \begin{bmatrix} 0 & a_{23} & a_{33} \\ -a_{13} & 0 & -a_{31} \\ a_{12} & -a_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= a_{13}(a_{21}a_{32}) + a_{12}(-a_{23}a_{31}) = 0$$

bulunarak  $X, Y, Z$ 'nin doğruduş olduğu görülür.



(2)  $K$  noktası  $\beta\beta'$  ve  $\gamma\gamma'$  doğrularının kesişim noktası olsun. Böylece  $K$  noktasının kutupluk doğrusu  $BC$ 'dir (Şekil 4). Projektif geometrinin temel teoremlerinden birisi neticesinde, bir taraftan  $\beta\gamma'$  ve  $\beta'\gamma$  diğer taraftan da  $\beta\gamma$  ve  $\beta'\gamma'$  doğru çiftleri  $BC$  üzerinde kesişmelidirler.

Yukardaki problemlerin bazı kısımlarını ancak projektif geometri yöntemleri kullanarak çözebildiğim için müteessirim. Okuyucuların daha sade çözümler arayarak eğleneceklerini ümid ederim.

**NOT:** Birinci problem, dergimizin Nisan 1998, 7. Cilt, 2. Sayısının 29. sayfasında yayınlanmıştı. Yazının bütünlüğünün korunması düşüncesiyle, aynen yayımlıyoruz. **Matematik Dünyası**