PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

-Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

-Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

-Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 31 Mayıs 2000 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.206. $x+y=1$ koşulunu sağlayan sayılar içinde x^3+xy+y^3 polinomuna minimum değer veren x ve y 'yi bulunuz.

A.207. Bir n doğal sayısının tüm pozitif bölenlerinin sayısına s diyelim. n 'nin tüm pozitif bölenlerinin çarpımını, n ve s cinsinden bulunuz.

A.208. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ ve $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ ise,

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq |\sum_{j=1}^{k} a_j|$$

eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eden bir $k \in \mathbf{N}$ bulunduğunu kanıtlayınız.

A. 209. x_1 ve x_2, $x^2-6x+1=0$ denklemini sağlayan sayılar olsun. Hiçbir n doğal sayısı için $x_1^n + x_2^n$ sayısının 5 ile bölünmediğini ispatlayınız.

A.210. $ABCD$ yamuğunun köşegenlerinin kesişim noktası E, $[BC]$ tabanı üzerinde bir nokta K ve $A\hat{K}E = D\hat{K}E$ ise, C 'nin AK doğrusuna uzaklığı $|CC'|$, B 'nin BK doğrusuna olan uzaklığı $|BB'|$ olmak üzere, $|BB'| = |CC'|$ olduğunu ispatlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.206. 25×25 karesinin her hanesine $+1$ ve -1 sayılarından biri yazılmıştır. i-inci satırdaki sayıların çarpımına a_i ve j-inci sütundaki sayıların çarpımına da b_j diyelim.

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_{25} + b_{25} \neq 0$$

olduğunu gösteriniz.

Y.207. Herhangi 3 tanesinden bir üçgen yapılabilen 5 doğru parçası verilmiştir. Bu doğru parçalarından yapılabilen üçgenler içinde en az bir tanesinin dar açılı olduğunu kanıtlayınız.

Y.208. Aşağıdaki denklemin tüm rasyonel köklerini bulunuz:

$$abx^2 + (a^2+b^2)x + 1 = 0 \qquad (a, b \in \mathbf{Z}).$$

Y.209. $a^n + 2^n + 1$ sayısı $a^{n+1} + 2^{n+1} + 1$ sayısını bölecek biçimde tüm a ve n pozitif tamsayılarını bulunuz.

Y.210. ABC dar açılı üçgeninde A, B, C 'den $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları, sırasıyla D, E, F; yine A, B, C 'den EF, FD, DE 'ye indirilen dikmelerin ayakları, sırasıyla P, Q, R ile gösterilmek üzere, AP, BQ, CR doğrularının aynı noktadan geçtiğini gösteriniz.

A.196. $n \in \mathbf{N}$ olmak üzere, 2^n ve 5^n sayılarının onluk sayı sisteminde yazılışlarındaki ilk rakamlarının aynı olduğu bilinmektedir. Bu rakamı bulunuz.

ÇÖZÜMLER

Çözüm. Söz konusu rakam 3 'tür. ($n=5$ için $2^5=32$ ve $5^5=3125$ 'tir ve demek ki, 3 rakamının ilk olduğu durum mevcuttur.) $n \geq 4$ durumunu incelemek yeter. 2^n ve 5^n nin ilk rakamları a ve rakamlar sayısı da, sırası ile, $s+1$ ve $t+1$ olsun. Bu takdirde

$$a.10^s < 2^n < (a+1).10^s \ ;$$

$$a.10^t < 5^n < (a+1).10^t$$

olur. Taraf tarafa çarparsak,

$$a^2.10^{s+t} < 10^n < (a+1)^2.10^{s+t} \ ,$$

$$a^2 < 10^{n-s-t} < (a+1)^2$$

elde ederiz. $1 \leq a \leq 9$ olduğundan, $n-s-t=1$ olmak zorundadır. Dolayısıyla, $a^2 < 10 < (a+1)^2$ ve buradan $a=3$ olduğu görülür.

A.197. $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$a_1 = 0, |a_2| = |a_1+1|, |a_3| = |a_2+1|, ..., |a_n| = |a_{n-1}+1|, ...$

Bu durumda, $2(a_1+a_2+...+a_n) \geq -n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $a_1 = 0, |a_2| = |a_1+1|, ..., |a_{n+1}| = |a_n+1|$ eşitliklerinin her iki yanının karesini alıp taraf tarafa toplarsak,

$$2(a_1+a_2+...+a_n)+n = a_{n+1}^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2(a_1+a_2+...+a_n) \geq -n$$

elde edilir.

A. 198. $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$ olduğu halde ıraksak olan bir sınırlı dizi var mıdır?

Çözüm. Evet, vardır. Bir örnek gösterelim. $a_n = \sin\sqrt{n}$ alalım. Her n için $|a_n| \leq 1$ ve dolayısıyla, (a_n) bir sınırlı dizidir. Bu dizi ıraksaktır. Çünkü, örneğin sıfıra ve bire yakınsayan altdiziler bulmak mümkündür.

Şimdi,

$$0 \leq |a_{n+1}-a_n| = |\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}|$$

$$= 2|\cos\tfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}|.|\sin\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}|$$

$$\leq 2|\sin\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}| \leq ...$$

($|\sin x| \leq |x|$ eşitsizliğini kullanıyoruz.)

$$\leq 2.\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0, \qquad (n\to\infty).$$

Sandviç teoreminden, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$.

A.199. $f : (1,\infty) \to \mathbf{R}$ sürekli bir fonksiyon olup her $x, y > 1$ için $f(xy) = x.f(y)+y.f(x)$ eşitliğini sağlamaktadır. f fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm. Eşitliğin her iki yanını xy ile bölelim:

$$\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}.$$

$\frac{f(x)}{x} = \varphi(x)$ dersek, $\varphi(xy) = \varphi(x)+\varphi(y)$ olur. Şimdi de bu eşitlikte x yerine e^x, y yerine de e^y koyarsak,

$$\varphi(e^{x+y}) = \varphi(e^x)+\varphi(e^y)$$

elde ederiz. $\varphi(e^t) = \psi(t)$ dersek, sonuncu eşitliği

$$\psi(x+y) = \psi(x)+\psi(y)$$

biçiminde yazabiliriz. Bu sonuncu ise Cauchy 'nin meşhur fonksiyonel denklemidir ve sürekli fonksiyonlar sınıfında onun çözümünün $\psi(x) = c.x$ olduğu kolayca gösterilebilir. "Geriye dönersek", problemdeki fonksiyonel denklemin çözümünün $f(x) = cx.\ln x$ olduğunu söyleyebiliriz.

A.200. ABC bir eşkenar üçgen ve P, bu üçgenin düzleminde bulunan herhangi bir nokta ise, $|PA|+|PC| \geq |PB|$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. $PABC$ dörtgeninde Ptolemy teoreminden

$$|PB|.|AC| \leq |PA|.|CB|+|PC|.|AB|$$

yazılır. Eşitlik, $MABC$ 'nin çembersel olması halinde geçerlidir.

$$|AB| = |BC| = |AC|$$

olduğundan $|PB| \leq |PA|+|PC|$ elde edilir.

Y.196. m ve n 'nin $(5+3\sqrt{2})^m = (3+5\sqrt{2})^n$ eşitliğini sağlayan tamsayı değerlerini bulunuz.

Çözüm. $m = n = 0$ için eşitlik sağlanır. m ve n 'nin başka tamsayı değerlerinde eşitliğin sağlanamayacağını gösterelim.

m ve n 'nin işaretleri farklı olursa, eşitlik sağlanamaz. Genelliği bozmadan $m > 0$, $n > 0$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, Binom formülü kullanılarak,

$$(5+3\sqrt{2})^m = x_m + y_m\sqrt{2},$$

$$(3+5\sqrt{2})^n = u_n + v_n\sqrt{2}$$

olacak biçimde $x_m, y_m, u_n, v_n \in \mathbf{N}$ sayılarının varlığını söyleyebiliriz. Bu sayıların eşit olması için gerek ve yeter koşul, $x_m = u_n$ ve $y_m = v_n$ olmasıdır.

Öte yandan, $x_m = u_n$ ve $y_m = v_n$ olması durumunda

$$(5-3\sqrt{2})^m = x_m - y_m\sqrt{2},$$

$$(3-5\sqrt{2})^n = u_n - v_n\sqrt{2}$$

eşitliklerinin sağ tarafları birbirinin aynı, fakat sol tarafları farklı olacaktır. Çünkü, $|5-3\sqrt{2}| < 1$ ve $|3-5\sqrt{2}| > 1$ 'dir.

Çözenler: (*Emrah Kaplan (Kayseri)*).

Y.197. $P(x)$, katsayıları tamsayılar olan bir polinom olmak üzere, belli bir n tamsayısı için $P(-n) < P(n) < n$ eşitsizlikleri sağlanıyor. $P(-n) < -n$ olacağını kanıtlayınız.

Çözüm. Her tamsayı a ve b $(a \neq b)$ için $P(a) - P(b)$ farkı $(a-b)$ farkına bölünür. Öyleyse, $P(n) - P(-n) > 0$ sayısı $n - (-n) = 2n$ sayısına bölünmelidir. Buradan

$$P(n) - P(-n) \geq 2n \Rightarrow$$

$$P(-n) \leq P(n) - 2n < n - 2n = -n$$

$$\Rightarrow P(-n) < -n$$

sağlanmalıdır.

Y.198. Her biri üçüncü dereceden ve reel katsayılı $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomlarının her $x \in \mathbf{R}$ için

$$P(x) \leq Q(x) \leq R(x)$$

eşitsizliklerini sağladığını varsayalım. Bununla beraber, $P(x_0) = R(x_0)$ sağlanacak biçimde bir $x \in \mathbf{R}$ sayısının varlığını düşünelim. Bu takdirde, her $x \in \mathbf{R}$ için

$$Q(x) = \alpha . P(x) + (1-\alpha)R(x)$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $\alpha \in [0,1]$ sabitinin varlığını kanıtlayınız.

Çözüm. Derecesi ≤ 3 olan bir $S(x)$ polinomu her $x \in \mathbf{R}$ için $S(x) \geq 0$ eşitsizliğini ve bir $x_0 \in \mathbf{R}$ noktasında $S(x_0) = 0$ eşitliğini sağlıyorsa, bu polinom

$$S(x) = a(x-x_0)^2, \quad (a \geq 0)$$

şeklinde olur. Bunu gözönüne alırsak,

$$R(x) - P(x) = a(x-x_0)^2,$$

$$Q(x) - P(x) = b(x-x_0)^2, \quad (0 \leq b \leq a)$$

eşitlikleri sağlanacak biçimde a ve b sabitlerinin varlığını söyleyebiliriz. $a > 0$ varsayabiliriz, çünkü $a = 0$ durumunda ispatı yapılacak bir şey yoktur.

Böylece, $\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} Q(x) &= P(x) + b(x-x_0)^2 \\ &= \frac{b}{a}[P(x) + a(x-x_0)^2] + \frac{a-b}{a}P(x) \\ &= \alpha P(x) + (1-\alpha)R(x) \end{aligned}$$

olur.

Y.199. Her reel $a_1, a_2, ..., a_n$ sayıları için

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1} \geq 0$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $P(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + ... + a_n x^{n-1}$ polinomuna bakalım.

$P^2(x) = \sum_{k,j=1}^{n} a_k a_j x^{k+j-2}$ ve

$0 \leq \int_0^1 P^2(x)dx = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{a_k a_j}{k+j-1}$.

Y.200. Bir E düzlemi ile düzlemin içinde bir A noktası ve dışında bir B noktası veriliyor. E düzlemi içinde öyle bir C noktası bulunuz ki, $\frac{|AB|+|AC|}{|BC|}$ maksimum olsun.

Çözüm. ABC üçgeninde $A\hat{B}C = \beta$, $B\hat{A}C = \alpha$, $A\hat{C}B = \gamma$ olsun. Sinüs teoreminden,

$$|AC| = |AB|.\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad |BC| = |AB|.\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

yazılarak

$$\frac{|AB|+|AC|}{|BC|}=\frac{|AB|+|AB|\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}}{|AB|\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}}=\frac{\sin\gamma+\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

bulunur.

α 'nın sabit olduğunu kabul ettiğimizde, $\beta=\gamma$ için ifade maksimum değerini alır ve $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ olur. $0<\alpha<\pi$ olduğundan α arttıkça $\sin\frac{\alpha}{2}$ de artar. α 'nın en küçük değerinde $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ maksimum olur. Bu AC doğrusu AB doğrusunun izdüşümü iken gerçekleşir. O halde, C noktası, AB 'nin izdüşümü üzerinde ve $|AC|=AB|$ şartını sağlayan noktadır.

Çözenler: (*Emrah Kaplan (Kayseri), Necati Girgin (Denizli)*).

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.
* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
* Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,

07058-Antalya

adresine gönderilecektir.