SAĞDUYUMUZA GÜVENELİM Mİ? EVET! ANCAK ÇOK ABARTMAYALIM...

İlham Aliyev
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058/ANTALYA

Bir bilim adamı ve özellikle, bir matematikçi için kuvvetli bir sağduyu çok önemlidir. Mükemmel bir teoremi keşfeden veya ispatı uzun yıllar bilinmeyen bir hipotezin olağanüstü kanıtını bulan matematikçi, yıllarını vermiş olduğu tecrübe ve bilginin yanısıra sağduyusuna da borçludur. Bilgisi ve tecrübesi olan yaşlı-başlı matematik doktorlarının çözemediği problemleri parlak sağduyuya sahip, tecrübesiz lise öğrencisinin çözdüğünün defalarca şahidi oldum. Bir matematikçinin cesaretli öngörüleri için çok önemli rol oynayan sağduyumuza güvenebilir miyiz? Güvenmekten başka çaremiz yoktur, fakat, bir kadar da dikkatli olmalıyız. Sağduyuların hepsi "doğruyu" söyleseydi ve böylece, Kopernik 'lerin, Einstein 'lerin, Cantor 'ların sağduyuları toplumun sağduyusunun aynısı olsaydı, şimdi güneş dünyanın etrafında dönüyordu, nükleer enerji keşfedilmemişti ve reel sayılar hakkında bilgimiz 5. sınıf öğrencisinin bilgisi kadardı!

Hatta çok büyük bilim adamlarının kendi sağduyusuna "yenik düşerek" büyük bilimsel hatalar yaptığına ait sayısız ilginç örnekler bilinmektedir. Fakat, biz hitap ettiğimiz okuyucu kitlesini göz önünde tutarak, lise-1 öğrencisinin rahatlıkla anlayabileceği çok sayıda örnek vermekle yetineceğiz.

Sevgili okurumuz! Sen de karşındaki problemleri oku ve çözüme bakmadan, sağduyunun nasıl "çalışıp çalışmadığını" kontrol etmek fırsatını yakala. İyi eğlenceler!

Problem 1.

Her birinin ağırlığı 1 tonu aşmayan bir kaç kutunun toplam ağırlığı 10 tondur. Tüm kutuları bir defada taşıyabilmek için en az kaç tane 3 tonluk kamyon gerekmektedir?

Çözüm. "Saf" bir sağduyu bu işi 4 kamyonun rahatlıkla yapabilebileceğini söylüyor. Oysa, öyle değildir. Gerçekten, her birinin ağırlığı $\frac{10}{13}$ ton olan 13 tane aynı kutu olduğunu düşünelim. Toplam ağırlığı 10 ton olan bu kutular 4 tane 3 tonluk kamyona yüklenemez! (Çünkü her kamyona en fazla 3 tane kutu koyabileceğimizden, 4 kamyona 12 kutu koyabiliriz ve böylece, 1 kutu yerde kalır.) 5 tane 3 tonluk kamyonun her zaman yeterli olacağını görmek zor değildir. Çünkü her kamyona en az 2 ton yük konulabiliyor. (Kamyondaki yük miktarı 2 tondan az ise, oraya ilave kutu(lar) koyar ve en az 2 ton yük elde edebiliriz. Bu arada her kutunun ağırlığının 1 tonu aşmadığına dikkat ediniz.)

Aşağıdaki problemle fizikçi arkadaşlarınızı şaşırtabilirsiniz:

Problem 2.

A kentinden B kentine 5,5 giden bir trenin, her 1 saatlik zaman diliminde 100 km yol gitmiş olduğu bilinmektedir. (Örneğin, saat 8 ile 9 arasında 100 km, saat 8 : 27 ile 9 : 27 arasında 100 km yol gitmiştir.)

Bu trenin saatteki ortalama hızı kaçtır?

Çözüm. "Doğaldır ki, 100 km/saat" diyenler yanılıyorlar! Ortalama hızın 100 km/saat olmadığı duruma bir örnek gösterelim. Trenin kullanmış olduğu $5,5$ saatlik zaman aralığını 11 tane yarım saatlik aralığa bölelim. Tren ilk yarım saatte yolu nasıl gitmişse (ivmeli, veya sabit hızla - önemli değil), $3., 5., ..., 11.$ yarım saatlerde de öyle gitsin. İlk yarım saatte (ve dolayısıyla, her tek yarım saatte) trenin gitmiş olduğu yol a ($(0 \leq a \leq 100)$ km olsun. Tren 2. yarım saatte nasıl gitmişse, $4., 6., ..., 10.$ yarım saatlerde de öyle gitsin ve 2. yarım saatte (dolayısıyla, her çift numaralı yarım saatte) gitmiş olduğu yol $(100 - a)$ km olsun. Bu takdirde, trenin her 1 saatlik zaman diliminde tam 100 km yol gitmiş olduğu kolayca görülebilir. şimdi trenin ortalama hızını hesaplayalım. Trenin tek yarım saatlerde gitmiş olduğu toplam yol $6a$ ve çift yarım saatlerde gitmiş olduğu yol $5(100 - a)$ km 'dir. Böylece tren $5,5$ saatte $6a + 5(100 - a) = 500 + a$ km yol gitmiştir. Öyleyse, onun hız ortalaması $(500 + a)/5,5$ km/saattir ki bu da sadece, $a = 50$ durumunda 100 km/saat olur.

Problem 3. "Teorem": Bir üçgenin üç açısı ve iki kenarının uzunluğu, diğer üçgenin üç açısına ve iki kenarının uzunluğuna eşitse, bu üçgenler eşit üçgenlerdir.

Bu "uyduruk" teoremin yalanını açığa çıkarmayı size bırakıyorum.

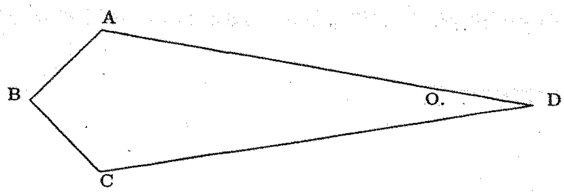
Problem 4. Bir üçgenin kenarlarının her birinin uzunluğu 100 m 'den büyük ve diğer üçgenin kenarlarının her birinin uzunluğu 1 cm 'den küçük ise, birinci üçgenin alanının ikinci üçgenin alanından büyük olacağını söyleyebilir miyiz?

Acemi bir matematiksever kesinlikle "evet!" der. Onun "kanıt" yollarından biri şöyle olabilir: Üçgenin alanı için Heron formülü $S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$ 'ye göre, üçgenin çevre uzunluğunun yarısı olan u büyüdükçe, alanı da büyüyecektir.

Oysa, öyle değildir. Basit bir örnek şöyle kurulabilir: Tabanı $200m$ ve yüksekliği çok küçük, örneğin, $10^{-7}m$ olan üçgenin alanı, tüm kenarları 100 m 'den uzun olmasına rağmen, kenarları 1/2 cm olan eşkenar üçgenin alanından küçüktür. (Bu konoya dalmışken, yükseklikleri 1 'cm den küçük, alanı ise 100 cm ^{2} 'den büyük üçgen kurun.)

Problem 5. Konveks dörtgenin içinde alınmış bir noktanın köşelerden uzaklıkları toplamının, dörtgenin çember uzunluğundan her zaman küçük olacağını iddia edebilir miyiz?

Bir kaç denemeden sonra sağduyumuza dayanarak, "evet" demek istiyoruz. Oysa, sağduyumuz bizi yanıltıyor. Aşağıda resmi verilmiş $ABCD$ dörtgeni içinde O noktasını D 'ye çok yakın alırsak, problemdeki iddianın doğru olmadığını görebiliriz.



Problem 6. Aşağıdaki iddialar doğru mudur?

(a) Herhangi 6 doğal sayı içinde ya ikişer ikişer aralarında asal 3 tanesi, ya da ortak bölenleri olan 3 tanesi bulunur.

(b) Bir sıraya dizilmiş herhangi 5 doğal sayı içinde, artan sırada veya azalan sırada dizilmiş 3 sayı muhakkak bulunacaktır.

(c) Bir sıraya dizilmiş herhangi 9 doğal sayı içinde artan sırada veya azalan sırada dizilmiş 4 sayı muhakkak vardır.

Çözüm.

(a) İddia doğru değil. Örnek: $6 = 2.3$, $10 = 2.5$, $15 = 3.5$, $77 = 7.11$, $91 = 7.13$, $143 = 11.13$.

(b) İddia doğrudur. 6 sayının en küçüğüne a, en büyüğüne de b diyelim. 6 sayının verilmiş diziliminde a ve b arasında bir sayı bulunuyorsa, iş biter. Aksi halde bu iki sayı yanyana gelmek zorundadır. O halde bu ikilinin ya sağında ya da solunda en az iki sayı bulunacaktır. Bu iki sayı ya a ile, ya da b ile birlikte alındığında istenen üçlü ortaya çıkar.

(c) İddia doğru değildir. Örnek olarak, $3, 2, 1, 6, 5, 4, 9, 8, 7$ dizilimini gösterebiliriz. Gösterelim ki, bu dizilimde artan veya azalan sırada dizilmiş 4 sayı bulmak olanaksızdır. Bunun için dizinin terimlerini, bulundukları sırada üçlülere ayıralım: $3, 2, 1$; $6, 5, 4$; $9, 8, 7$. Buradan görünüyor ki, azalan sırada alınmış herhangi 3 sayı aynı bir üçlüde bulunmalıdır ve artan sırada alınmış sayılar ise farklı üçlülerde bulunmalıdır. Dolayısıyla, 4 sayı seçmek olanaksızdır.

Tamsayı çözümlerinin bulunması istenen denklemlerde (Diyofont denklemleri) sağduyumuz bizi sık sık yanıltabilir. Bilindiği gibi, Diyofont denklemleri ile ilgili "olumsuz problemler" 'de modüler aritmetik güçlü bir araçtır. Ne demek istediğimizi bir örnekle açıklayalım:

Örnek 7. $x^3 - 3y^2 = 2$ denkleminin tamsayılarda çözümünün olmadığını gösterelim. Şöyle bir basit gözlemi kullanacağız: Bir eşitlik doğru ise, her $n \in \mathbb{N}$ için bu eşitlik *mod* n 'de de doğru olmalıdır. Şimdi verilen denklemi *mod* 9 'da düşünelim. *mod* 9 'da sağ taraf 2 'ye denktir. $x := 3n$, $3n \pm 1$ ve $y := 3k$, $3k \pm 1$ koyarak, denklemin sol tarafının hiç bir zaman 2 'ye denk olmayacağını kontrol edebilirsiniz.

Bu tip problemlerden esinlenerek, sağduyumuz bizi, şöyle bir kuralın doğru olacağına inandırmaya "çalışıyor": Bir Diyofont denkleminin tamsayılarda çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul, bu denklemin her $n \in \mathbb{N}$ için *mod* n 'de çözümünün varlığıdır. Gereklilik kısmı açık olan bu iddianın yeterlilik kısmı bir çok matematikçiyi uzun zaman uğraştırmış ve ispat bulunamamıştır. Bir çok uğraştan sonra ispatın neden bulunamadığının sebebi ortaya çıkmıştır: Böyle bir ispat bulunamaz, çünkü iddia yanlıştır.

Norveçli matematikçi Zelmer'in kurmuş olduğu

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$$

denkleminin her n için *mod* n 'de çözümü olmasına rağmen, $(0, 0, 0)$ 'dan farklı bir tane bile tamsayı çözümü yoktur. (Bunun ispatı çok zordur!!!)

Aşağıdaki soruyu bankacı (veya muhasebeci) tanıdıklarınıza sorun ve büyük olasılıkla, vereceği "hayır" yanıtının yanlış olduğunu söylediğinizde ne hallere düşeceğine bakın:

Soru 8. Bir tüccar her ay aylık kazancını ve kaybını not defterine yazdı. Tüccarın her ardışık 5 aydaki toplam kaybı aynı süredeki toplam kazancından çok, fakat yıllık toplam kaybı yıllık toplam kazancından az olabilir mi?

Yanıt. Evet, olabilir. Aşağıdaki 12 sayı bir yılın her ayındaki kazançla kayıp arasında farkı göstersin:

$$2, 2, 2, 2, -9, 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2 .$$

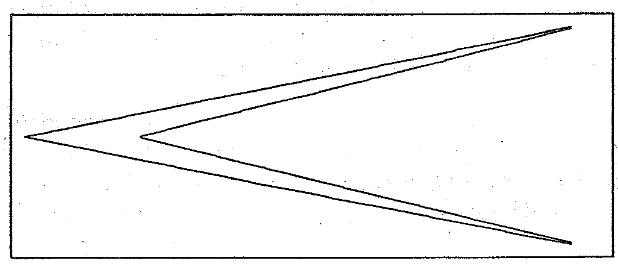
Kolayca görülebileceği üzere, herhangi 5 ardışık sayının toplamı negatif (-1) ve tüm sayıların toplamı pozitiftir (2 'dir).

Problem 9. Toplamları 1 ve her biri 1 'den küçük bir kaç sayının küpleri toplamı 1 'den büyük olabilir mi?

Çözüm. Acele etmeyin, bir az uğraşın ve sabırsızlandığınızda, yazımızın son kısımlarına bakın.

Problem 10. Çevre uzunluğu P_1 olan bir dörtgen, çevre uzunluğu P_2 olan bir dörtgenin içine çizilmişse, $P_1 > P_2$ olabilir mi?

Çözüm. "Hayır" demek için acele etmeyin ve aşağıdaki şekile bakın. (Suratınızı asmayın; ben dörtgenlerin konveks olup olmadıkları hakkında bir şey söylemedim ki...). $P_1 > 2P_2$ olabilir mi? Hiç korkmadan "hayır" diyebilirsiniz. (Hiç bir zaman $P_1 > 2P_2$ olamayacağını ispatlamaya çalışın.)



Problem 11. 4 tane 1×1, 8 tane 2×2, 12 tane 3×3, 16 tane 4×4, 20 tane 5×5 karesinden yeni bir kare oluşturulabilir mi?

Çözüm. Probleme nasıl yaklaşmalıyız? Bu kareleri, uygun biçimde birbirine yapıştırarak bir büyük kare elde edebilmek için gerek ve yeter koşul, bunların alanlar toplamının bir tam kare olmasıdır.

$$4.1^2 + 8.2^2 + 12.3^2 + 16.4^2 + 20.5^2 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3) = 4(\frac{1+5}{2}.5)^2 = (2.15)^2 = 30^2$$

Böylece, verilen kareleri birleştirerek, kenar uzunluğu 30 olan bir kare kurulabilir (yapmaya çalışın).

Şimdi de kalem, kağıt ve sağduyunuzu (ve belki de bir bardak kahve) kullanarak, "evet" veya "hayır" diye yanıtlayacağınız bir kaç problem öneriyorum. Sizin yaşta olduğum zamandan tanıştığım ve çoğu anonim olan bu problemleri sizin de seveceğinizi umuyorum:

Problem 12. Hepsi aynı büyüklükte karton daireler verilmiştir. Bunların
(a) 24 tanesini; (b) 25 tanesini
masa üzerine, her daire tam üç daireye dokunacak biçimde dizmek mümkün müdür?

Problem 13. İkisi de tahtadan yapılmış, aynı büyüklükte küplerin birinde, diğer küp rahatlıkla geçebilecek biçimde, delik açmak mümkün müdür?

Problem 14. **(a)** 19×19 kare cetvelinin hanelerine öyle sayılar yerleştirmek mümkün müdür ki, her sütundaki sayıların toplamı pozitif ve her satırdaki sayıların toplamı negatif olsun?

(b) 5×5 kare cetvelinin hanelerine öyle sayılar yerleştirmek mümkün müdür ki, her 2×2 karesindeki sayıların toplamı negatif, fakat tüm 25 sayının toplamı pozitif olsun?

Problem 15. Kenar uzunluğu 1 cm olan küpü, kenar uzunluğu 3 cm olan kağıt yaprağa sarmak mümkün müdür?

Problem 16. Değerler kümesi tüm pozitif sayılar kümesi ile çakışan iki değişkenli $P(x,y)$ polinomu var mıdır?

Yanıtlar: 12(a)-evet, 12(b)-hayır; 13-evet; 14(a)-hayır, 14(b)-evet; 15-evet, 16-evet.

Problem 16 için, örneğin, $P(x,y) = (1-xy)^2 + x^2$ polinomu alınabilir. Nihayet, Problem 9 'daki özelliklere sahip sayılara bir örnek gösterelim. Aşağıdaki sekiz sayıyı alalım: 2 tane $0,8$; 6 tane $(-0,1)$. Bunların toplamı 1 'e eşittir; her birinin mutlak değeri 1 'den küçüktür ve küpler toplamı 1 'den büyüktür: $2(0,8)^3 + 6(-0,1)^3 = 1,018 > 1$.

TEŞEKKÜRLER

Matematik Dünyası 'nı çıkartan birim olarak en büyük sorunlarımızdan biri, basılan sayılarımızın dağıtımı olmuştur. Kısıtlı olanaklara sahip olmamız dağıtım işini epeyce güçleştirmektedir. Son çıkan sayılarımızla birlikte derginin dağıtımını üstlendikleri için özellikle *Yurtiçi Kargo* sahibi Sayın **İbrahim Arıkan** 'a ve *Antalya Bölge Müdürü* Sayın **Yaşar Mutlu** 'ya en içten dileklerimizle teşekkür ediyoruz.

Matematik Dünyası Yayın Kurulu *Antalya, 04.05.2000*
