TÜBİTAK-BAYG-VII. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI

Semih Koray
Bilkent Üniversitesi, İktisat Fakültesi, ANKARA

---

2. Aşama Sınavı, 3 Aralık 1999, 1. Gün (Her soru 7 puan, süre 4,5 saattir.)

1. $0 \leq x, y, z, w \leq 36$ olmak üzere,

$$x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}$$

denkliğini sağlayan (x, y, z, w) sıralı tamsayı dörtlülerinin sayısını bulunuz.

2. O merkezli bir çembere, dışındaki bir S noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları P ve Q; SO doğrusunun çemberle kesişim noktaları A ve B; PB (küçük) yayının herhangi bir iç noktası X; QX ve PX doğrularının OS doğrusu ile kesişim noktaları C ve D ile gösterilmek üzere,

$$\frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|} = \frac{2}{|AB|}$$

olduğunu ispatlayınız.

3. n ve p pozitif tamsayılar olmak üzere, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ için $|f(i) - f(j)| \leq p$ şartını sağlayan

$$f : \{1, 2, ..., n\} \to \{-p, -p+1, ..., p-1, p\}$$

fonksiyonlarının sayısının $(p+1)^{n+1} - p^{n+1}$ olduğunu gösteriniz.

2. Aşama Sınavı, 4 Aralık 1999, 2. Gün (Her soru 7 puan, süre 4,5 saattir.)

4. Her $n > 1$ için $a_n = a_{n-1}(2 - a_{n-1})$, $\frac{1}{2} < a_1 < 1$ ve $\sum_{n=1}^{2000} a_n = 1999$ koşullarını sağlayan tüm (a_n) gerçel sayı dizilerini bulunuz.

5. Çevrel çemberinin yarıçapı R olan dar açılı bir $A_1A_2A_3$ üçgeninde, A_1, A_2 ve A_3 noktalarından geçen yüksekliklerin ayakları sırasıyla Y_1, Y_2 ve Y_3, $|A_1Y_1| = h_1$, $|A_2Y_2| = h_2$, $|A_3Y_3| = h_3$; A_1, A_2 ve A_3 noktalarından $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberine çizilen teğetlerin uzunlukları da sırasıyla t_1, t_2 ve t_3 ile gösterilmek üzere,

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}}\right)^2 \leq \frac{3}{2}R$$

olduğunu ispatlayınız.

6. 40 sayının toplamını, 8 "işlemci" kullanarak bulmak istiyoruz. Başlangıçta, her işlemcinin ekranında 0 sayısı bulunuyor. Herhangi bir işlemci, kendisine dışarıdan verilen ya da başka bir işlemciden aktarılan sayıyı, ekranındaki mevcut sayıyla bir birim zamanda toplayarak, elde ettiği sonucu ekranına yazıyor. Ekranındaki sayıyı başka bir işlemciye aktaran bir işlemcinin ekranı kararıyor. Verilen 40 sayıdan istediklerimizi istediğimiz işlemciye girerek ve işlemcilerin elde ettiği kısmi toplamları da istediğimiz işlemciye aktararak, bu 40 sayıyı en az kaç birim zamanda toplayabiliriz?

–o–

ÇÖZÜMLER

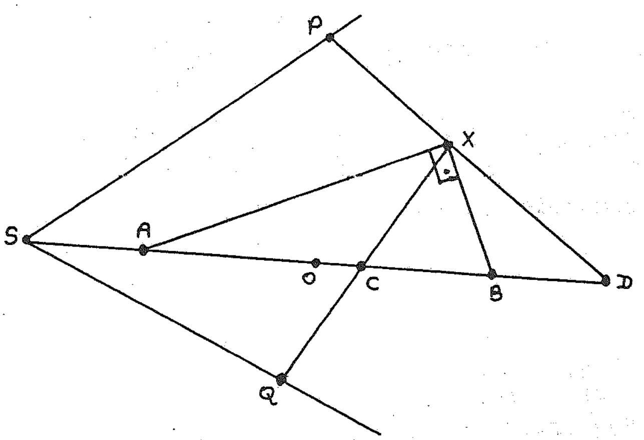
1. Önce a bir tamsayı olmak üzere, $x^2 + y^2 \equiv a \pmod{37}$ denkliğini sağlayan (x, y) sıralı tamsayı ikililerinin sayısını bulalım. $a \equiv 0 \pmod{37}$ ise, $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{37}$ denkliği, $y^2 \equiv (6x)^2 \pmod{37}$ ve dolayısıyla $y \equiv \pm 6x \pmod{37}$ denkliklerine eşdeğer olduğu için, çözüm olarak $2 \cdot 36 + 1 = 73$ (x, y) sıralı ikilisi elde edilir.

Şimdi de $a \not\equiv 0 \pmod{37}$ durumuna bakalım. $x^2 + y^2 \equiv x^2 - 36y^2 \equiv (x - 6y)(x + 6y) \pmod{37}$ olduğu için, aradığımız sayı $(x - 6y)(x + 6y) \equiv a \pmod{37}$ denkliğini sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin sayısıdır. Öte yandan, $a \not\equiv 0 \pmod{37}$ olduğundan, her $1 \leq u \leq 36$ tamsayısı için, $uv \equiv a \pmod{37}$ ve $1 \leq v \leq 36$ koşullarını sağlayan tam olarak bir v tamsayısı bulunur. Böyle (u, v) sıralı ikilileri ile $u \equiv x - 6y$, $v \equiv x + 6y$, $0 \leq x$, $y \leq 36$ koşullarını sağlayan (x, y) sıralı ikilileri arasında bire-bir bir eşleme bulunduğundan, bu durumda, $x^2 + y^2 \equiv a \pmod{37}$ bağıntısının çözümü olan 36 (x, y) ikilisi bulunur.

Diğer taraftan $z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$ denkliği, $w^3 \equiv -z^3 \pmod{37}$, dolayısıyla da $w \equiv -z$ veya $11z$ veya $-10z \pmod{37}$ bağıntılarına eşdeğerdir. Yani $z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$, $0 \leq z$, $w \leq 36$ koşullarını sağlayan $36 \cdot 3 + 1 = 109$ (z, w) sıralı tamsayı ikilisi vardır. Sonuç olarak, (z, w) ikililerinin alabileceği toplam 37^2 değerden 109 'u için, istenen koşulu sağlayan 73 (x, y) ikilisi, $37^2 - 109$ tanesi için de 36 (x, y) ikilisi vardır. Aranan sayı,

$$109 \cdot 73 + (37^2 - 109) \cdot 36 = 53317 \quad \text{'dir.}$$

2.



SPQ üçgeni ($SP = SQ$) ikizkenar üçgen olup, A noktası PQ yayının orta noktası ve dolayısıyla XA, $P\hat{X}Q$ açısının açıortayıdır. Diğer taraftan, $A\hat{X}B$ açısı AB çapını gören bir çevre açı olduğundan bir dik açıdır. Bu nedenle XB, $Q\hat{X}D$ açısının açıortayıdır. CXD üçgeninde XB ve XA açıortay olduklarından, açıortay teoremi gereğince,

$$\frac{CB}{BD} = \frac{AC}{AD} \left(\Leftrightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD} \Leftrightarrow \frac{CB}{AC} = \frac{DB}{AD}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{CB}{AC} = \frac{DB}{AD} \Rightarrow \frac{CB}{AB \cdot AC} = \frac{DB}{AB \cdot AD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB - AC}{AB \cdot AC} = \frac{AD - AB}{AB \cdot AD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$$

bulunur.

3. Verilen koşulları sağlayan ve aldığı en yüksek değer q olan fonksiyonların sayısını $Q(q)$ ile gösterelim. Önce $q \in \{0,...,p\}$ olduğu duruma bakalım. Her $i,j \in \{0,...,n\}$ için $|f(i) - f(j)| \le p$ koşulu nedeniyle, bu durumda, her $k \in \{0,...,n\}$ için $f(k) \in \{q-p, q-p+1,...,q\}$ olur. Aldığı tüm değerler bu kümeye ait olan $(p+1)^n$ tane fonksiyon bulunup, bunlardan q değerini hiç almayanların sayısı p^n dir. Dolayısıyla, $Q(q) = (p+1)^n - p$ olur.

Eğer $q \in \{1,...,p\}$ ise, benzer biçimde, $Q(-q) = (p-q+1)^n - (p-q)^n$ bulunur. Verilen koşulları sağlayan fonksiyonların toplam sayısı,

$$(p+1)((p+1)^n - p^n) + \sum_{q=1}^{p}((p-q+1)^n - (p-q)^n)$$
$$= (p+1)^{n+1} - (p+1)p^n + p^n = (p+1)^{n+1} - p^{n+1}$$

olur.

4. Her $n > 1$ için,

$$1 - a_n = 1 - a_{n-1}(2 - a_{n-1}) = (1 - a_{n-1})^2;$$

dolayısıyla da

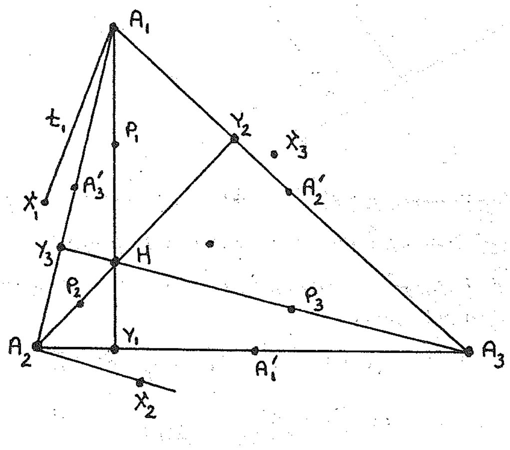
$$1 - a_n = (1 - a_1)^{2^{n-1}}$$

olur. (a_n) verilen koşulları sağlayan bir gerçel sayı dizisi ise,

$$1 = 2000 - 1999 = 2000 - \sum_{n=1}^{2000} a_n = \sum_{n=1}^{2000}(1 - a_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{2000}(1 - a_1)^{2^{n-1}} < \sum_{n=1}^{\infty}(1 - a_1)^n = \frac{1 - a_1}{a_1} < 1$$

olacağı için, böyle bir dizinin bulunmadığı gösterilmiş olur.

5.



Çevrel çemberin merkezi O, $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberi ile yüksekliklerin kesişim noktaları P_1, P_2 ve P_3 ile gösterilmek üzere A_1 noktasının $(Y_1Y_2Y_3)$ çemberine göre kuvveti: A_1 'den çizilen teğetin uzunluğu t_1 olduğundan,

$$t_1^2 = A_1P_1 \cdot A_1Y_1$$

$$t_1^2 = A_1P_1 \cdot h_1 \Rightarrow \frac{t_1^2}{h_1} = A_1P_1$$

ve benzer biçimde t_2, t_3 için de bu eşitlikler yazılarak,

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3} A_iP_i$$

bulunur. Yükseklik ayaklarından geçen çember, aynı zamanda kenarların orta noktaları olan A_1', A_2', A_3' 'den ve HA_1, HA_2, HA_3'ün orta noktaları olan P_1, P_2, P_3 'den de geçer ve $A_iP_i = OA_i'$ eşitliği sağlanır. Bu nedenle,

$$\sum_{i=1}^{3} A_iP_i = \sum_{i=1}^{3} OA_i'$$

olur. (İkinci tarafı hesaplayalım.) $A_1A_3'OA_2'$ kirişler dörtgeni olduğundan Ptolemy Teoremi gereğince,

$$OA_1 \cdot A_2'A_3' = OA_2' \cdot A_1A_3' + OA_3' \cdot A_1A_2' \tag{1}$$

ve benzer biçimde $A_2A_1'OA_3'$, $A_3A_2'OA_1'$ dörtgenlerinden de,

$$OA_2 \cdot A_3'A_1' = OA_1' \cdot A_2A_3' + OA_3' \cdot A_2A_1' \tag{2}$$

$$OA_3 \cdot A_1'A_2' = OA_1' \cdot A_3A_2' + OA_2' \cdot A_3A_1' \tag{3}$$

'dür. Bu (1), (2), (3) eşitlikleri taraf tarafa toplanarak; $OA_1 = OA_2 = OA_3 = 1$ olduğu gözönünde tutulup, $A_2A_3 = a$, $A_3A_1 = b$, $A_1A_2 = c$ alındığında, $A_3'A_2' = \frac{a}{2}$, $A_3'A_1' = \frac{b}{2}$, $A_1'A_2' = \frac{c}{2}$ olacağından,

$$\begin{aligned}
\tfrac{a+b+c}{2} &= OA_1'\left(\tfrac{c}{2}+\tfrac{b}{2}\right) + OA_2'\left(\tfrac{c}{2}+\tfrac{a}{2}\right) + OA_3'\left(\tfrac{a}{2}+\tfrac{b}{2}\right) \\
&= OA_1'\left(\tfrac{a+b+c}{2}-\tfrac{a}{2}\right) + OA_2'\left(\tfrac{a+b+c}{2}-\tfrac{b}{2}\right) + OA_3'\left(\tfrac{a+b+c}{2}-\tfrac{c}{2}\right) \\
&= \left(\tfrac{a+b+c}{2}\right)\left(OA_1'+OA_2'+OA_3'\right) - \left(\tfrac{a\cdot OA_1' + b\cdot OA_2' + c\cdot OA_3'}{2}\right) \\
&= \left(\tfrac{a+b+c}{2}\right)\textstyle\sum_{i=1}^{3} OA_i' - Alan(A_1\overset{\triangle}{A_2}A_3).
\end{aligned}$$

$Alan(A_1\overset{\triangle}{A_2}A_3) = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) r$ (r : iç yarıçap) yazıldığında,

$$\frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2}\sum_{i=1}^{3} OA_i' - \frac{a+b+c}{2} r$$

$$\Rightarrow \quad R = \sum_{i=1}^{3} OA_i' - r \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{3} OA_i' = R + r$$

Her üçgende çevrel yarıçap (R) ile iç yarıçap (r) arasında $R \geq 2r$ bağıntısı vardır. O halde $R \geq 2r \Rightarrow r \leq \frac{R}{2}$ ve $R + r \leq R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$ olur. Buradan,

$$\sum_{i=1}^{3} OA_i' = \sum_{i=1}^{3} A_iP_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}}\right)^2 \leq \frac{3R}{2}$$

bulunur.

6. Belli bir anda, herhangi bir işlemciye girilmemiş sayılarla, işlemcilerin ekranlarındaki sayılara "işlem görecek kalem" diyelim. $n(c)$ ile, c zaman birimi sonundaki işlem görecek kalem sayısını gösterelim. $n(0) = 40 + 8 = 48$ 'dir; $\tilde{c}$ zaman birimi sonunda istenen toplam elde edilmişse $n(\tilde{c}) = 1$

olur. (Burada genelliği yitirmeden her işlemcinin kullanıldığını varsayıyoruz.) Bir zaman biriminde en fazla 8 işlem yapılabilir; ayrıca yine bir zaman biriminde, işlem görecek kalem sayısı, en fazla yarıya indirilebilir. Dolayısıyla,

$$n(c) - n(c+1) \leq \min\{\frac{n(c)}{2}, 8\},$$

ya da eşdeğer biçimde,

$$n(c+1) \geq \max\{\frac{n(c)}{2}, n(c) - 8\}$$

olur. Şimdi $M(0) = 48$; $M(c+1) = \max\{\lceil \frac{M(c)}{2} \rceil, M(c) - 8\}$ sistemine bakalım. ($\lceil x \rceil := x$ 'ten büyük ya da x 'e eşit olan en küçük tamsayıdır.)

$\tilde{C}$, $M(\tilde{C}) = 1$ koşulunu sağlayan en küçük tamsayı; $\hat{C}$ da aranan yanıt ise, $\hat{C} \geq \tilde{C}$ 'dir. $\tilde{C}$ 'yı bulalım:

$M(0) = 48;$ $\quad M(1) = \max\{\lceil \frac{48}{2} \rceil, 40\} = 40;$

$M(2) = \max\{\lceil \frac{40}{2} \rceil, 32\} = 32;$ $\quad M(3) = \max\{\lceil \frac{32}{2} \rceil, 24\} = 24;$

$M(4) = \max\{\lceil \frac{24}{2} \rceil, 16\} = 16;$ $\quad M(5) = \max\{\lceil \frac{16}{2} \rceil, 8\} = 8;$

$M(6) = \max\{\lceil \frac{8}{2} \rceil, 0\} = 4;$ $\quad M(7) = \max\{\lceil \frac{4}{2} \rceil, -4\} = 2;$

$M(8) = \max\{\lceil \frac{2}{2} \rceil, -6\} = 1.$

Yani $\tilde{C} = 8$ 'dir. Aranan sayı $\tilde{C} \geq 8$ olur.

Aşağıdaki çizelgede, köşeler işlemcileri; üçgenler ilk beş zaman biriminde işlemcilere girilen 5 'er sayıyı; yönlü kenarlar da, hangi işlemcinin kısmi toplamının hangi işlemciye aktarıldığını göstermek üzere; istenen toplamın 8 zaman biriminde elde edilebileceği görülmektedir. Yani, $\hat{C} = 8$ 'dir.