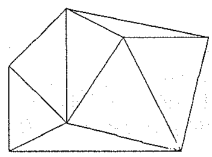
AH ŞU ÇOKGENLER!...

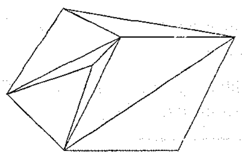
Çağrı Özçağlar
Akdeniz Koleji Fen Lisesi, ANTALYA

Giriş. Klasik düzlem geometrisinin ilginç konularından biri çokgenler (üçgenler, dörtgenler, ...vs.) konusudur. Çokgenler ile ilgili sayı kullanılmayan, hesap yapılmayan problemler düşünülmüştür ve düşünülmektedir. Genelde "üçgen problemi" sözkonusu olduğunda akla gelen ilk şeyler üçgenin alanı, yükseklikleri, açıortayları ve kenarortayları, iç ve dış teğet çemberin yarıçapı,... vs. gibi kavramlar oluyor. Ancak üçgen ve başka çokgenlerle ilgili olup da, yukarıdaki kavramların kullanılmadığı bir sürü çok ilginç problem mevcuttur. İşte, bu yazımızda bu tip problemlerin bazılarını inceleyeceğiz.

İlk problemimiz bir konveks çokgeni üçgenlere bölmekle ilgili.

Problem-1: $n \geq 3$ olmak üzere, bir konveks $n-$gen verilsin. $n-$genin içinde m tane nokta işaretlensin. n-genin köşelerinin ve işaretlenmiş noktaların oluşturduğu $n+m$ tane noktanın herhangi üçünün doğrusal olmadığını düşünelim. $n-$geni, kenarları birbiriyle kesişmeyen ve köşeleri sözkonusu $n+m$ nokta üzerinde bulunan üçgenlere bölelim. Örneğin 5-gen içinde 2 tane nokta işaretlenmişse, 5-genin üçgenlere "ayrışım"larından -ki bunlar çok fazladır- ikisi şekildeki gibidir:





Dikkat edilirse, her iki şekilde de 7 tane üçgen olduğu gözlenebilir. Acaba bu bir rastlantı mıdır, yoksa üçgenler sayısı ayrışımlardan bağımsız ve yalnızca n ile m'ye bağımlı bir sabit midir? Son söylediğimiz bu sorunun yanıtıdır ve çözümü oldukça ilginçtir.

Üçgenleri şöyle sayalım: Tüm üçgenlerin içaçılarının toplamını bulalım ve bu sayıyı 180 'e bölelim! Kolayca anlaşılacağı üzere; üçgenlerin içaçıları toplamı, $n-$genin içaçıları toplamı ile (yani $(n-2)\cdot 180$ ile) $m \cdot 360$ sayısının (çünkü $n-$genin içindeki m noktadan herbiri, üzerinden ne kadar doğru geçerse geçsin, 360^o 'lik bir açı oluşturur) toplamına eşittir. Öyleyse, herhangi bir ayrışımdaki üçgenler sayısı,

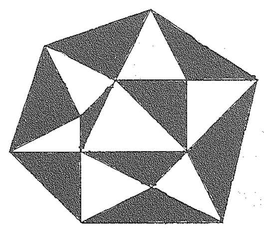
$$\frac{(n-2)\cdot 180 + m\cdot 360}{180} = 2m+n-2 = 2(m-1)+n$$

formülüyle bulunabilir. Bu genel formülden görüldüğü gibi, üçgenler sayısının tek veya çift olması, m sayısından bağımsızdır ve m ne olursa olsun; konveks çokgenin köşe sayısı çift ise üçgenler sayısı da çift; köşe sayısı tek sayı ise üçgenler sayısı da tek sayı olur.

Yukarıdaki yöntemi kullanarak, bir çokgeni üçgenlere değil, dörtgenlere (konveks olmaları gerekmez) bölebilir misiniz? (Bu durumda n 'nin çift olması gerekecektir.)

Şimdi, bir konveks çokgenin üçgenlere ayrışımı konusundaki ikinci problemimize geçelim:

Problem-2: Bir konveks 6-gen, şekildeki gibi siyah ve beyaz üçgenlere bölünmüştür, şöyle ki:



(a) Herhangi iki üçgenin ya ortak kenarı vardır (ki böyle üçgenlerin rengi farklıdır); ya ortak köşesi vardır; ya da hiç bir ortak noktası yoktur.

(b) Altıgenin her kenarı bir siyah üçgenin kenarıdır.

İspat ediniz ki; 10-geni, 1999-geni, 2000-geni yukarıdaki koşulları sağlayan üçgenlere bölemeyiz.

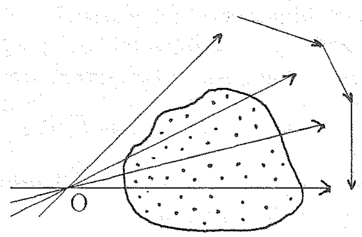
Bunu ispat etmek için siyah ve beyaz üçgenlerin kenar sayılarıyla, verilen çokgenin kenar sayısı arasındaki bağıntıyı veren bir formül bulalım. Siyah üçgenler sayısı n, beyaz üçgenler sayısı k ve çokgenin kenar sayısı m olursa, şekilden de anlaşılacağı üzere,

$$3\cdot n = 3\cdot k + m$$

formülü geçerlidir. Yani, çokgenin kenar sayısı olan m, 3 'e bölünmezse, bu koşulları sağlamak mümkün değildir. Buradan görüldüğü gibi, $m = 10, 1999, 2000$ olamaz.

Üçüncü problemimiz düzlem geometrisinin tanımsız terimleri ve dörtgenlerle ilgili. Bu problemde, köşeleri verilmiş $4k$ tane noktada bulunan k tane dörtgen çizmekle uğraşacağız.

Problem-3: Düzlem üzerinde, herhangi üçü doğrusal olmayan 4000 tane nokta verilsin. Köşeleri bu noktalardan oluşan ve birbiriyle kesişmeyen 1000 tane dörtgenin çizilebileceğini kanıtlayınız. (Dörtgenlerin konveks olması gerekmez.)



Problemi çözmek için, bütün noktaları ikişer ikişer alarak, onlardan doğrular geçirelim (toplam $\binom{4000}{2}$ tane doğru). Verilen 4000 noktayı kapsayan bir dairenin dışında, sözkonusu doğrulardan hiçbirinin üzerinde bulunmayan bir O noktası alalım.

O 'dan geçen her doğru üzerinde en fazla bir tane işaretlenmiş nokta bulunacaktır. O'dan geçen bir ışını saat yönünde döndürerek, işaretlenmiş noktaları birer birer "sol" tarafa bırakıyoruz. Sol tarafta 4 nokta elde edildiği anda, köşeleri bu noktalarda olan bir dörtgen çiziyoruz. Daha sonra ikinci dörtlüyü "sol" tarafa bırakarak ikinci dörtgeni çiziyoruz ve bu şekilde devam ediyoruz. (Dörtgenlerin konveks olması gerekmediğini unutmayalım.)

Son problemimiz ise bir kaç çokgenle, bir başka çokgeni örtmek konusu ile ilgili:

Problem-4: Kağıttan kesilerek yapılmış 15 tane çokgen, masayı tam örtecek biçimde masa üzerine yerleştirilmiştir. (Çokgenler masa dışına taşabilirler ve birbirlerinin üzerini kapatabilirler.) İspat edelim ki, çokgenlerden öyle 7 'sini almak mümkündür ki, geriye kalanlar masanın en az $\frac{8}{15}$ 'lik kısmını kapatmış olsun.

Bunun için çokgenleri rasgele numaralayalım. k $(= 1, 2, 3, ..., 15)$ numaralı çokgenin altında kalan ve başka çokgenlerle örtülmeyen masa parçasının alanına S_k diyelim. (Bazı k 'lar için $S_k = 0$ olabilir.) Masanın alanına S denirse,

$$S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{15} = S$$

olur. S_k 'lar içinde en küçük olan 7 tanesini alırsak, geriye kalanların toplamı $\geq \frac{8}{15} \cdot S$ olacaktır. Dolayısıyla, geriye kalan çokgenler masanın en az $\frac{8}{15}$ 'lik kısmını örtmüş olacaktır.

Sonuncu problemi şöyle de ifade edebiliriz: Bir ağaçta n tane yaprak olsun. Ağacın altındaki gölgenin alanına S diyelim. Yapraklardan öyle k, $(k < n)$ tanesini almak mümkündür ki, geriye kalan yapraklar, alanı en az $\frac{n-k}{n} \cdot S = (1 - \frac{k}{n}) \cdot S$ olan bir bölgeyi gölgelendirmiş olsun.

Teşekkürler: Bu çalışmanın gerçekleşmesindeki katkılarından dolayı Doç. Dr. İlham Aliyev 'e (Akdeniz Üniversitesi) içten teşekkürlerimi sunarım.