RASGELE DİZİ VE π

Levent Özbek
Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü, Tandoğan, 06100-ANKARA

Giriş

π sayısı matematik bahçesinin en zarif çiçeklerinden birisidir. Archimedes'den beri yüzlerce yıldır matematikçilerin ve diğer bilim insanlarının merak ve ilgiyle kokladıkları bir çiçek olagelmiştir. Bu sayının birçok özelliği vardır: Dairenin çevresinin çapına oranıdır, transandant (aşkın) bir sayıdır (katsayıları tamsayı olan cebirsel bir denklemin çözümü olamayan sayı). Binlerce yıldır insanlar π 'nin daha çok ondalık basamağını hesaplamaya çalışmaktadır ve bu ondalık basamakların nasıl bir dağılım gösterdiği merak konusudur. π 'ye duyulan bu ilgi nereden kaynaklanmaktadır? Acaba π 'nin bugüne kadar bilinen özelliklerinden başka daha keşfedilmeye hazır hangi özellikleri vardır? Matematik bahçesinin en zarif çiçeği orada durmakta ve belki de sonsuz özelliklerini sunmaya hazır bir sevgili gibi beklemektedir.

Bu yazı, rasgele dizi kavramı çerçevesinde π 'nin ondalık basamaklarını ele almakta, bu ondalık basamakların rasgele dizi tanımına uygunluğunun araştırılması amacını taşımaktadır.

Kısa Tarihçe

Hemen hemen tüm matematik kitaplarında, özellikle matematiğe ilgi duyan kişilerin okuması için yazılan matematikle ilgili kitaplarda π 'nin özelliklerinden söz edilmeden geçilmemiştir [1]-[9].

Archimedes bir dairenin içine çizdiği çokgenin kenar sayısını artırarak π 'nin 310/71 ile 31/7 arasında olduğunu yaklaşık olarak hesaplamış, bunu Mısırlı matematikçiler yaklaşık 3.16 olarak bulmuştu. M.S. 150 'de Batlamyus, π 'yi 3,1416 olarak hesaplamıştır. Archimedes 'in yaklaşık olarak hesaplama yöntemi sürdürülebilirdi. Ama diferansiyel ve integral hesabın bulunmasından sonra Eski Yunan yöntemi bırakıldı; π 'yi yaklaşık olarak hesaplarken, yakınsak sonsuz seriler, çarpımlar ve sürekli kesirler kullanıldı [4].

Archimedes'ten sonra π sayısı üzerinde çok çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan biri, π sayısının irrasyonel bir sayı olduğunun gösterilmesidir. π sayısının ondalık gösterimi veya açılımı, π=3,14159265... biçiminde, devretmeyen sonsuz ondalıklı bir sayıdır. James Gregory (1638-1675)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

olduğunu buldu. Bu seri, π sayısının sayısal değerini hesaplamak için kullanışlı bir seri olmamakla birlikte, π sayısı ile tek sayılar arasındaki zarif bağıntıyı göstermesi bakımından ilginçtir. Lindemann (1852-1939), 1882 yılında π sayısının transandant (aşkın) olduğunu göstermiştir. Ludolph, 1600 yıllarında π sayısının 35.ondalık basamağına kadar hesabını yaptı. Daha sonra John Machin (1680-1751), 1706 yılında bulduğu bir formülle, π sayısının 100. ondalık basamağına kadar hesabını yaptı. John Wallis (1616-1703)

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2.2.4.4...2n.2n}{1.3.3.5...(2n-1).(2n-1)}$$

olduğunu buldu. Yine Machin 'in

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}(\frac{1}{5})-\tan^{-1}(\frac{1}{239})$$

biçimindeki formülünü kullanan William Shanks, 1873 yılında π sayısının 707. ondalık basamağına kadar bu hesaplamayı götürdü. Bu hesaplama tam on beş yıl sürdü. O. F. Ferguson, 1946 yılında Shanks'in bu hesabının 528.basamağında bir yanlışlığın yapıldığını saptadı. John W. Wrench Jr. ve Daniel Shanks, Wasinghton'daki IBM 7090 bilgisayarı ile π sayısının değerini, 100625. ondalık basamağına kadar doğru olarak hesapladı. Bu sürenin dokuz saatten daha az bir zaman aldığını *belirtelim. Son olarak, π sayısı iki milyonuncu basamağa kadar hesaplandı ve 800 sayfalık bir kitap haline getirildi. Bu kitabın son satırının son on basamağı 1457297909 rakamlarıyla bitiyordu* [7].

π 'yi hesaplamak için kullanılan en ilginç yollardan birini 18.yy'da Fransız doğa bilimci Buffon (kontu) George "İğne Probleminde" kullanmıştır. Bir düzlem, araları d birim olan paralel çizgilerle ayrılmıştır. Uzunluğu d'den kısa olan bir iğne, bu çizgili yüzeye düşürülür. Eğer iğne bir çizginin üzerine düşerse, iyi atış olarak kabul edilir. Buffon' un şaşırtıcı buluşu, iyi atışların, kötü atışlara oranının π 'yi içeren bir açıklamasının olmasıydı. Eğer iğnenin uzunluğu d birimse, iyi atış olasılığı $2/\pi$ 'dir. 1901 'de Lazzerini 3408 atış yaparak π 'nin değerini 3,1415929 olarak hesapladı ki bu altı ondalık basamağa kadar doğruydu. π 'yi hesaplamak için başka bir olasılık yöntemi 1904 'de R. Charles tarafından bulundu. Buna göre, rasgele yazılan iki sayının göreceli asal olmalarının olasılığı $6/\pi$ 'dir. π 'nin geometri, olasılık, diferansiyel ve integral hesaplamalarında nasıl farklı bir biçimde kullanıldığını görmek gerçekten de ilginçtir. Niye biri bugün süper bilgisayarlarla yapıldığı gibi, π 'nin değerini milyonlarca basamağa kadar hesaplamak istesin? π 'nin ondalık basamaklarına karşı bu ilginin kaynağı nedir? Bu, süper bilgisayarların donanım ve yazılımlarının kapasitelerinin ölçülmesinde kullanılır. Hesaplama yöntemleri, yeni düşüncelerin ve kavramların ortaya çıkmasını sağlar. Gerçekten, π 'nin bir düzeni, kalıbı yok mu? Sonsuz çeşitlilikte kalıplar mı içeriyor?. π 'nin içindeki bazı sayılara daha sık mı rastlanıyor? Öyleyse bu sayılar tam da rasgele dağılmış değil mi acaba? Belki de matematikçilerin yüzyıllar boyunca π 'ye duydukları ilgi ve hayranlık, dağcıları hep daha yükseklere tırmanmaya yönelten güçlü istek ve duygulara benzetilebilir [4].

Rasgelelik ve π Sayısı

Rasgelelik veya bununla bağlantılı determinizm (belirlenmişlik) konusu, Aristoteles'den günümüze tartışılan felsefi problemler arasında yeralmaktadır. 20. yy.'ın başlarında kuantum fiziğinin gelişmesiyle beraber Newton'un belirlenimci dünya görüşü (saat gibi tıkır-tıkır işleyen evren) yerini olasılıkçı dünya görüşüne bırakmak zorunda kalmıştır.

Pagels "rasgelelik nedir?" sorusuna cevap vermeye çalışırken, matematiksel ve fiziksel rasgelelik problemleri arasında ayrım yapmanın önemine değinmiştir.

Matematiksel problem, sayılar veya fonksiyonların rasgele sırasının ne anlama geldiğini tanımlayan bir mantıksal problemdir. Fiziksel rasgelelik problemi gerçek fiziksel olayların rasgelelik konusundaki matematiksel kriterlere uyup uymadığını belirlemektir. Rasgeleliğin matematiksel bir tanımına sahip olana kadar, doğal olayların bir dizisinin gerçekten rasgele olup olmadığını belirleyemeyiz. Bir kere böyle bir tanımımız olunca, o zaman, gerçek olayların böyle bir tanıma karşılık gelip gelmediğini belirleme konulu ek deneysel bir problemimiz olur. Burada ilk problemle karşılaşırız: Matematikçiler, rasgeleliğin kesin bir tanımını verme ya da onunla bağlantılı bir iş olan olasılığı tanımlama işinde hiç bir zaman başarı sağlayamamıştır ... [8].

Yine Pagels π sayısının ondalık açılımındaki sayıların rasgelelik testlerinden geçebileceğini veya bu sayıların çeşitli olasılık dağılımlarına uyabileceğini belirtmiş, π sayısının ondalık açılımdaki sayıları ele alarak rasgele bir tamsayılar dizisini tanımlama problemi üzerinde durmuştur.

Buffon 'un İğne Problemi; π'nin bir geometrik olasılık probleminin çözümü sonucunda ortaya çıkması açısından özellikle ilginçtir. Bu deney herkes tarafından kolayca yapılabilir ve π için bir tahmin elde edilebilir. Olasılık ve istatistik kitaplarının hemen hepsinde Buffon 'un İğne Problemine yer verilmiştir [10]-[14]. Yine π 'yi tahmin etmek için,

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

formülü ele alınarak Monte-Carlo İntegrasyonu olarak bilinen yöntem kullanılabilir. $U_1, U_2, \ldots, U_n$ rasgele değişkenleri $(0,1)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olmak üzere (hesap makinalarındaki

RND tuşu, bilgisayarlardaki RND fonksiyonu veya rasgele rakamlar tablosu kullanılarak bu sayılar elde edilebilir)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-U_i^2}$$

toplamı; $\pi/4$ için bir tahmin verecektir.

Ekonomi, sayısal çözümleme, şifreleme, bilgisayar programlama, deneysel fizik, istatistik,... gibi birçok uygulamalı bilim alanında rasgele sayılar simülasyon (benzetim) aşamasında kullanılmaktadır. Kısaca simülasyon; model üzerinde deney yapmadır. Rasgelelik içeren olay ve süreçlerin bilgisayar ortamında deneyinin yapılmasıdır.

Gerçek dünyada rasgelelik olgusunun içinde bulunan ve ölçümler ile elde edilen sayılar bir rasgele değişkenin sahip olduğu dağılımdan alınan örneklemin gözlenen değerleri olarak düşünülmekle birlikte, simülasyonda böyle gözlemler nasıl elde edilir?

Son yıllarda, simülasyon, özellikle eğitim alanında kullanılan yöntemlerin başında gelmektedir. Simülasyonun temelinde de rasgele sayılar yatmaktadır. Yapılan simülasyon işleminin gerçek dünyadaki olayı iyi bir şekilde taklit edebilmesi istenir, eğer taklit iyi yapılamıyorsa deney gerçek dünyadaki olayı iyi temsil edemeyecektir. Bu nedenlerle rasgele dizi kavramının uygulama açısından önemi büyüktür. İstatistiksel dağılımlardan örnek almak (model üzerinde deney yapma, bilgisayarda deney yapma, gözlem alma) için $(0,1)$ aralığında düzgün dağılıma sahip rasgele değişkenlerin çeşitli fonksiyonları kullanılır. Eğer $(0,1)$ aralığındaki düzgün dağılımdan rasgele sayı üretilemiyorsa doğaldır ki diğer dağılımlardan da sayı üretmek mümkün olamamaktadır. Bunun için çeşitli üreteçler (fonksiyonel ilişki) kullanılmakta ve çeşitli istatistiksel özellikleri sağlayan üreteçler rasgele sayı üreteçleri olarak kullanılmaktadır. Bu sayılar belirli kurallara göre üretildiklerinden "sözde rasgele sayı" olarak bilinmektedir.

Günümüzde bilgisayar teknolojilerinin gelişmesi ile beraber π 'nin milyarlarca ondalık basamağı CD-ROM 'lara kaydedilerek simulasyon çalışması yapanların kullanımına sunulmuştur. π sayısı doğal rasgele sayı üreteci olarak adlandırılmıştır. Dodge [15], π ile ilgili geniş bir tarihçe ve son hesaplama yöntemleri ile ilgili bilgi verdikten sonra, π 'nin ilk 6 milyar basamağında geçen 0,1,...,9 rakamlarının düzgün dağıldığını göstermiştir.

KAYNAKLAR

[1] S. Sertöz, Matematiğin Aydınlık Dünyası, Tübitak Yay.,1996.
[2] M. Boll, Matematik Tarihi, İletişim Yay., 1991.
[3] G. Gamov, 1-2-3 Sonsuz, Evrim Yay., 1995.
[4] T. Pappas, Yaşayan Matematik, Sarmal Yay., 1993.
[5] G. H. Hardy, Bir Matematikçinin Savunması, Tübitak Yay., 1994.
[6] J. P. King, Matematik Sanatı, Tübitak Yay., 1997.
[7] A. Dönmez, Matematik Tarihi, V Yay., 1986.
[8] H. R. Pagels, Kozmik Kod, Doğanın Dili/Kuantum Fiziği, Sarmal Yay., 1992.
[9] A. Erdil, Aşkın Sayılar Üzerine, Matematik Dünyası, Sayı 2, 1998.
[10] B.J.T. Morgan, Elements of Simulation, Chapman and Hall, 1992.
[11] H.C. Tuckwell, Elementary Applications of Probability Theory, Chapman and Hall, 1998.
[12] F.Öztürk, Matematiksel İstatistik, A.Ü.F.F. Yay. No:10, 1993.
[13] P. Bremaud, An Introduction to Probabilistic Modeling, Springer-Verlag, 1988.
[14] I. Deak, Random Number Generators and Simulation, Akademiai Kiado, Budapest 1990.
[15] Y. Dodge, A Natural Random Number Generator, International Statistical Review, 1996, 329-344.