elde edilir. $a=\tan x_i$ ve $b=\tan x_j$ yazarak problemin çözümünü bitiriyoruz.

Teşekkürler: Bu çalışmanın gerçekleşmesinde yaptığı katkılar nedeniyle Doç. Dr. İlham Aliyev 'e (Akdeniz Üniversitesi) teşekkürlerimizi sunarız.

KAYNAKLAR

[1] Halil İ. Karakaş- İlham Aliyev, Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, Tübitak, Anlara, 1998.
[2] Halil İ. Karakaş- İlham Aliyev, Analiz ve Cebirde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, Tübitak , Ankara, 1998.
[3] Halil İ. Karakaş, Analitik Geometri, Akdeniz Üniversitesi Yayınları.
[4] Abdullah Demiralp-Mehmet Gürkan-Tahsin Pelit, Liseler için Matematik 3 Ders Kitabı.
[5] Diba Yılmaz-Ali Cevahir, Geometri ve Trigonometrinin Cebirde Bazı Uygulamaları (1), Matematik Dünyası , 8-5 (1999) 24-27.

ÖNEMLİ DUYURU

Türk Matematik Derneği, Vezneciler'den Karaköy'e taşındı. Türk Matematik Derneği'nin yeni adresi, telefon ve faks numaraları aşağıdaki gibidir:

Adres: Türk Matematik Derneği
Sabancı Üniversitesi Karaköy İletişim Merkezi, Bankalar Caddesi, No.2
80020-Karaköy/İSTANBUL
Tel: (0.212) 292.49.39/1506
Faks: (0.212) 252.32.93

TAMKATSAYILI POLİNOMLARIN RASYONEL KÖKLERİ: NEWTON YÖNTEMİ

Halil İ. Karakaş
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Cebir ve sayılar teorisinin ilginç problemlerinden biri, katsayıları tamsayılar olan bir polinomun rasyonel köklerinin belirlenmesi problemidir. Okullarımızın ders programlarında bu konuya değinilmekle beraber, bu yazımızda sunacağımız Newton yöntemi konu ile ilgili derslerin içeriğinde pek görülmez.

Burada, polinomlarla ilgili temel tanım, kavram ve özellikleri tekrar etmeyeceğiz. Arzu eden okurumuz bu doğrultuda özet bilgiyi [2] no'lu kaynakta (Sayfa:10,11) bulabilir.

Bununla beraber, bir tamkatsayılı polinom denince, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tamsayılar olmak üzere,

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

biçiminde bir ifade anlaşıldığını ve herhangi bir s sayısı için

$$P(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0$$

tanımlandığını hatırlayalım. Eğer $P(x)$ polinomunun **katsayıları** olarak adlandırılan a_0, a_1, $\cdots$, a_n 'yi reel sayılar veya bilen okurlarımız için herhangi bir tamlık bölgesinin elemanları olarak seçersek, o zaman $P(x)$ 'e, reel katsayılı veya katsayıları sözkonusu tamlık bölgesinde olan polinom denir.

Katsayıları bildiğimiz sayı sistemlerinden biri içinde olan bir $P(x)$ polinomu ve bir s sayısı verildiğinde, $P(s) = 0$ ise, s sayısı $P(x)$ polinomunun bir **kökü** 'dür denir. Eğer s bir rasyonel sayı ise, s 'ye $P(x)$ 'in bir **rasyonel kökü** denir.

Tüm katsayıları tamsayı olan bir polinoma "tamkatsayılı polinom" diyeceğiz. Polinomların kökleri ile ilgili birkaç temel özelliği verdikten sonra tamkatsayılı polinomların köklerinin incelenmesine geçeceğiz ve Newton yöntemini sunacağız.

Teorem 1 (Bezout). Reel katsayılı bir $P(x)$ polinomu ve bir s reel sayısı verilmiş olsun. Bu takdirde, $(x - s)$ polinomu $P(x) - P(s)$ 'yi böler. Daha açık bir ifade ile,

$$P(x) - P(s) = (x - s)A(x) \tag{1}$$

olacak biçimde, reel katsayılı bir $A(x)$ polinomu vardır. Ayrıca, eğer $P(x)$ 'in katsayıları ve s sayısı rasyonel ise, (1) ifadesindeki $A(x)$ polinomunun katsayıları da rasyoneldir.

İspat. Her $k \geq 1$ için

$$x^k - s^k = (x - s)(x^{k-1} + x^{k-2}s + \cdots + xs^{k-2} + s^{k-1}) \tag{2}$$

olduğunu biliyoruz. $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ise,

$$P(x) - P(s) = a_n(x^n - s^n) + \cdots + a_2(x^2 - s^2) + a_1(x - s)$$

olur. (2) özdeşliği $k = 1, \cdots, n$ için uygulanırsa, uygun bir $A(x)$ polinomu için

$$P(x) - P(s) = (x - s)A(x)$$

elde edilir. Burada, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ ve s rasyonel sayılar ise, $A(x)$ 'in katsayılarının da rasyonel olacağı açıktır.

Sonuç 1. Eğer $P(x)$, reel katsayılı bir polinom ve s sayısı onun bir kökü ise, uygun bir reel katsayılı $A(x)$ polinomu için,

$$P(x) = (x - s)A(x) \tag{3}$$

olur. Ayrıca, $P(x)$ 'in katsayıları ve s, rasyonel sayılar ise, $A(x)$ 'in katsayıları da rasyoneldir.

İspat. Teorem 1 'de $P(s) = 0$ olacaktır.

Sonuç 2. $P(x)$ rasyonel katsayılı bir polinom, p ve q tamsayılar, $q \neq 0$ olsun. Eğer $\frac{p}{q}$ sayısı $P(x)$ 'in bir kökü ise,

$$P(x) = (qx - p)B(x) \tag{4}$$

olacak biçimde rasyonel katsayılı bir $B(x)$ polinomu vardır.

İspat. Sonuç 1 'e göre,

$$P(x) = (x - \frac{p}{q})A(x)$$

olacak biçimde rasyonel katsayılı bir $A(x)$ polinomu vardır. $B(x) = \frac{1}{q}A(x)$ de rasyonel katsayılı bir polinomdur ve

$$P(x) = (qx - p)\frac{1}{q}A(x) = (qx - p)B(x)$$

istenilen sonucu verir.

Sonuç 1 'de, s sayısının $P(x)$ 'in bir kökü olması için bir gerek koşul verilmektedir. Bu gerek koşulun aynı zamanda bir yeter koşul olduğu; yani, (3) koşulu sağlanırsa, s 'nin, $P(x)$ 'in bir kökü olacağı açıktır. Benzer şekilde, Sonuç 2 'de (4) koşulu sağlanırsa, $\frac{p}{q}$ sayısı $P(x)$ 'in bir kökü olur.

Şimdi, tamkatsayılı polinomları ele alıyoruz:

Teorem 2. $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, tamkatsayılı bir polinom; p ve q aralarında asal tamsayılar, $q \neq 0$ olsun. Eğer $\frac{p}{q}$ sayısı $P(x)$ 'in bir kökü ise, a_0 sayısı p ile ve a_n sayısı da q ile tam bölünür.

İspat. $\frac{p}{q}$ 'nun kök olması durumunda,

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

ifadesi q^n ile çarpılırsa,

$$a_n p^n + q^{n-1} a_n p + \cdots + q^{n-1} a_1 p + q^n a_0 = 0$$

elde edilir. Bu ifadede son terim dışında her terim p ile bölündüğünden ve q ile p aralarında asal olduğundan, p sayısı a_0 'ı böler. Benzer şekilde, ilk terim dışında her terim q ile bölündüğünden, q sayısı a_n 'yi böler.

Teorem 2, tamkatsayılı bir polinomun rasyonel kökleri araştırılırken kök olmağa aday olarak düşünülebilecek rasyonel sayıları sonlu bir kümeye indirgemektedir. Örneğin,

$$P(x) = 8x^5 - 10x^4 + 5x^3 - 18x^2 + 7x + 3$$

polinomunun kökleri (varsa),

$$\{\frac{-3}{8}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{1}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{1}, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$$

kümesinin elemanları arasındadır. Bunlardan hangisinin $P(x)$ polinomunun kökü olduğunun belirlenmesi de başlı başına bir problemdir. Newton yöntemi, bu doğrultudaki pratik yöntemlerden biridir.

Newton yönteminin temelini oluşturan aşağıdaki teorem, [2] no'lu kaynakta problem olarak verilmiştir (Sayfa 184, Problem 6.27). Orada verilen ispatta bazı yazım hataları ve eksikler vardır. Bu vesile ile oradaki yazım hatalarını ve eksikleri de gidermiş oluyoruz.

Teorem 3. $P(x)$, tamkatsayılı bir polinom; p ve q aralarında asal tamsayılar ve $q \neq 0$ olsun. Eğer $\frac{p}{q}$ sayısı $P(x)$ 'in bir kökü ise, her t tamsayısı için $(qt-p)$ sayısı $P(t)$ 'yi tam böler.

İspat. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ olsun. Burada, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tamsayılardır. Eğer $\frac{p}{q}$, $P(x)$ 'in bir kökü ise, Sonuç 2 'ye göre,

$$P(x) = (qx-p)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) \tag{5}$$

olacak biçimde $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ rasyonel sayıları vardır. Teoremin ispatı için $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ 'in her birinin bir tamsayı olduğunu göstermek yeter. Şimdi, (5) eşitliğinde katsayılar karşılaştırılırsa,

$$\begin{aligned}
a_0 &= -pb_0 \\
a_1 &= qb_0 - pb_1 \\
a_2 &= qb_1 - pb_2 \\
&\vdots \\
a_{k-1} &= qb_{k-2} - pb_{k-1} \\
a_k &= qb_{k-1} - pb_k \\
a_{k+1} &= qb_k - pb_{k+1} \\
&\vdots \\
a_{n-1} &= qb_{n-2} - pb_{n-1} \\
a_n &= qb_{n-1} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{6}$$

olduğu görülür. Teorem 2 'ye göre p sayısı a_0 'ı ve q sayısı a_n 'yi böldüğünden, b_0 ve b_{n-1} her ikisi de tamsayıdır. Tümevarımla, $b_1, \cdots, b_{n-2}$ 'nin her birinin bir tamsayı olduğunu göstereceğiz. $b_0, b_1, \cdots, b_k$ 'nın her birinin bir tamsayı olduğunu gösterdiğimizi varsayalım $(0 \leq k < n-2)$ ve b_{k+1} 'in de bir tamsayı olduğunu gösterelim. Katsayılar arasındaki ilişkiler de kullanılarak kolayca görülebilir ki,

$$\begin{aligned}
P(x) - (qx-p)(b_o + b_1 x + \cdots + b_{k-1}x^{k-1}) &= (qx-p)(b_k x^k + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}) \\
&= (-pb_k)x^k + (qb_k - pb_{k+1})x^{k+1} + \cdots + (qb_{n-1})x^n \\
&= (a_k - qb_{k-1})x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots + a_n x^n
\end{aligned}$$

'dir. Burada x yerine $\frac{p}{q}$ yerleştirilirse,

$$0 = (a_k - qb_{k-1})\frac{p^k}{q^k} + a_{k+1}\frac{p^{k+1}}{q^{k+1}} + \cdots + a_n \frac{p^n}{q^n}$$

elde edilir. Son eşitlik $\frac{q^n}{p^k}$ ile çarpılarak,

$$0 = (a_k - qb_{k-1})q^{n-k} + a_{k+1}q^{n-k-1}p + \cdots + a_n p^{n-k}$$

elde edilir. Buradan, $a_k - qb_{k-1}$ tamsayısının p ile tam bölündüğü görülür ki, $-pb_k = a_k - qb_{k-1}$ olduğundan bu, b_k 'nın da bir tamsayı olduğunu gösterir.

Teorem 3 'ün ispatında kullandığımız (6) özdeşliklerine biraz daha yakından bakalım. Bu özdeşlikler kullanılarak $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ ardışık olarak elde edilebilir. Bu düşünce ile, $c_0,\ c_1,\ \ldots\ ,\ c_k,\ \ldots$ 'yı aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} c_0 &= -b_0 = +\frac{a_0}{p} \\ c_1 &= -b_1 = +\frac{a_1 - qb_0}{p} = \frac{a_1 + qc_0}{p} \\ c_2 &= -b_2 = +\frac{a_2 - qb_1}{p} = \frac{a_2 + qc_1}{p} \\ &\vdots \\ c_k &= -b_k = +\frac{a_k - qb_{k-1}}{p} = \frac{a_k + qc_{k-1}}{p} \qquad (7) \\ &\vdots \end{aligned}$$

O halde, p ve q aralarında asal tamsayılar, $q \neq 0$ olmak üzere, $\frac{p}{q}$ 'nun $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 'nin bir kökü olması için önce, $c_0 = \frac{a_0}{p}$, sonra, $c_1 = \frac{a_1+qc_0}{p}$, $\cdots$, sonra, $c_k = \frac{a_k+qc_{k-1}}{p}$, $\cdots$ tamsayı olmalıdır. Bu durumu pratik olarak kontrol etmek için, $P(x)$ 'in katsayıları sıralanarak

a_0	a_1	$\cdots$	a_{n-1}	a_n

tablosu oluşturulur ve $c_0 = \frac{a_0}{p}$ sayısı bulunur. (Burada sıralamanın a_0 ile başlayıp a_n ile bittiğine dikkat ediniz.) Eğer c_0 bir tamsayı değilse, $\frac{p}{q}$ sayısı $P(x)$ 'in kökü olamaz; c_0 tamsayı ise, yukarıdaki tabloda a_1 'in altına c_0 yazılır ve üçüncü satıra, a_1 'in altına, $a_1 + qc_0$ 'ın değeri yazılır.

a_0	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n
	c_0				
	$a_1 + qc_0$				

Şimdi, $c_1 = \frac{a_1+qc_0}{p}$ sayısı hesaplanır. Eğer c_1 bir tamsayı değilse, $\frac{p}{q}$ sayısı $P(x)$ 'in bir kökü olamaz; c_1 bir tamsayı ise, tabloda a_2 'nin altına c_1 yazılır ve bunun da altına, üçüncü satıra, $a_2 + qc_1$ 'in değeri yazılır. Sonra, $c_2 = \frac{a_2+qc_1}{p}$ sayısı hesaplanarak aynı işlem sürdürülür:

a_0	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
	c_0	c_1	c_2			
	$a_1 + qc_0$	$a_2 + qc_1$				

Açıklamaya çalıştığımız bu yönteme **Newton yöntemi** denir. Newton yönteminde ikinci satırda $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ tamsayıları elde edilebilirse, her $k = 0, 1, \cdots, n-1$ için $b_k = -c_k$ olmak üzere,

$$P(x) = (qx - p)(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1})$$

'dir.

Örnek olarak, Newton yöntemini

$$P(x) = 8x^5 - 10x^4 + 5x^3 - 18x^2 + 7x + 3$$

polinomuna uygulayalım. Bu polinomun kökü olabilecek sayıların

$$\{\frac{-3}{8}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{1}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$$

kümesinin elemanları arasında olacağını biliyoruz. Önce $\frac{-3}{2}$ sayısını deneyelim: Bu örneğimizde, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$ (Neden?), $a_2 = -18$, $a_3 = 5$, $a_4 = -10$, $a_5 = 8$; $p = -3$, $q = 2$ 'dir. Dolayısıyla, $c_0 = \frac{3}{-3} = -1, c_1 = \frac{7-2}{-3} = -\frac{5}{3}$ 'tür:

3	7	-18	5	-10	8
	1	$\frac{-5}{3}$			

$c_1 = \frac{-5}{3}$ bir tamsayı olmadığından, $\frac{-3}{2}$ bir kök değildir.

Şimdi $\frac{3}{2}$ 'yi deneyelim: $p = 3$, $q = 2$. $c_0 = \frac{3}{3} = +1, c_1 = \frac{7+2}{3} = 3$. İşlemlerimizi tablo üzerinde sürdürelim:

3	7	-18	5	-10	8
	1	3	-4	-1	-4
	9	-12	-3	-12	

Böylece, $\frac{3}{2}$ sayısının bir kök olduğu ve $P(x) = (2x-3)(-1-3x+4x^2+x^3+4x^4)$ yazılabileceği görülür. Eğer $P(x)$ 'in başka rasyonel kökleri varsa, bunlar $Q(x) = (-1 - 3x + 4x^2 + x^3 + 4x^4)$ polinomunun kökleri ve dolayısıyla, $\{\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$ kümesinin elemanlarından biri olmalıdır. $\frac{-1}{4} = \frac{(-1)}{4}$ sayısını deneyelim:

-1	-3	4	1	4
	1	-1	0	-1
	1	0	1	

Tablodan, $\frac{-1}{4}$ 'ün $Q(x)$ için bir kök olduğu ve

$$Q(x) = (4x+1)(-1+x+x^3)$$

yazılabileceği görülür. Böylece,

$$P(x) = (2x-3)(4x+1)(x^3+x-1)$$

olduğu görülür. Ayrıca, $x^3 + x - 1$ polinomunun hiç rasyonel kökü bulunmadığından (nedenini düşününüz), $P(x)$ 'in rasyonel kökleri $\frac{3}{2}$ ve $\frac{-1}{4}$ 'ten ibaretttir.

$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ polinomu verildiğinde,

$$R(x) = x^nP(\frac{1}{x}) = a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

polinomunu düşünelim. Eğer $s \neq 0$, $P(x)$ polinomunun bir kökü ise, $\frac{1}{s}$ de $R(x)$ polinomunun bir kökü olur. Bu bağlamda, yukarıda $Q(x) = -1 - 3x + 4x^2 + x^3 + 4x^4$ polinomunun kökleri araştırılırken, bunun yerine $R(x) = 4 + x + 4x^2 - 3x^3 - x^4$ polinomunun köklerine bakmak yeterli olabilirdi. $R(x)$ için kök adayları, $\mp 4, \mp 2, \mp 1$ 'dir. $-4 = \frac{-4}{1}$ sayısını Newton yöntemi ile denersek

4	1	4	-3	-1
	-1	0	-1	1
	0	4	-4	

tablosu elde edilir, buradan $R(x) = (x+4)(1 + x^2 - x^3)$ olduğu; dolayısıyla $R(x)$ 'in -4 'ten başka, $Q(x)$ 'in de $\frac{-1}{4}$ 'ten başka rasyonel kökü bulunmadığı görülür.

Newton yönteminin $R(x)$ 'e uygulaması **Horner yöntemini** çağrıştırıyor mu?

Newton yönteminden hoşlanan ve yöntemi pekiştirmek isteyen okurlarımıza, rasyonel köklerini bulmaları için aşağıdaki polinomları öneriyoruz:

(1) $8t^3 + 22t^2 - 13t + 6$
(2) $48x^5 + 80x^4 - 160x^3 - 140x + 37x + 30$
(3) $12x^3 - 4x^2 - 17x - 6$
(4) $6x^3 + 17x^2 + 4x - 12$
(5) $21x^3 + 11x - 9x^3 + x^3$

KAYNAKLAR

[1] Barbeau, E. J.; Polynomials, Problem Books in Mathematics; Springer- Verlag, Berlin, 1995.

[2] Karakaş, H. İ. - Aliyev, İ.; Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri (4. baskı) TÜBİTAK, 1999.