ÜÇGENİN ELEMANLARI ARASINDAKİ BAZI EŞİTLİK VE EŞİTSİZLİKLER II

Mehmet Şahin
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06100, Tandoğan-ANKARA

e-posta: sahinm@science.ankara.edu.tr

Öncelikle yazıda kullandığımız bazı gösterimleri tanımlayalım. R: çevrel çember yarıçapı; r: içteğet çember yarıçapı; s: yarı çevre; F: alan; a, b, c: üçgenin BC, AC, AB kenarlarının uzunlukları; α, β, γ: üçgenin iç açıları; r_a, r_b, r_c: dış teğet çemberlerin yarıçapları; h_a, h_b, h_c: üçgenin yükseklikleri; m_a, m_b, m_c: üçgenin kenarortayları; w_a, w_b, w_c : üçgenin açıortayları.

Teorem 1.1. Her üçgende

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{3}s$$

olur. Burada eşitliklerin geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

Kanıt: $2F = ah_a = bh_b = ch_c$ olduğundan

$$h_a + h_b + h_c = 2F\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

'dir. Aritmetik ortalama-harmonik ortalama eşitsizliğine göre

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad \text{olup} \quad h_a + h_b + h_c \geq \frac{9.2.F}{a+b+c} = \frac{18.F}{2.s} = \frac{9.F}{s}$$

ve $F = r.s$ olduğundan $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ bulunur. $h_a \leq w_a$, $h_b \leq w_b$, $h_c \leq w_c$, olduğu biliniyor. $p = w_a + w_b + w_c$ diyelim. $p \leq \sqrt{3}s$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}\ ,\ a + c \geq 2\sqrt{ac}\ ,\ b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

eşitsizliklerini kullanacağız.

$$w_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}\ ,\ w_b = \frac{2\sqrt{acs(s-b)}}{a+c}\ ,\ w_c = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}$$

olduğu biliniyor. O halde yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak

$$w_a \leq \sqrt{s(s-a)}\ ,\ w_b \leq \sqrt{s(s-b)}\ ,\ w_c \leq \sqrt{s(s-c)}$$

elde edilir.

$$p = w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{s(s-a)} + \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-c)}$$

olup $\forall x, y, z > 0$ için $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} p^2 &\leq \left(\sqrt{s(s-a)} + \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-c)}\right)^2 \\ &\leq 3\left[s(s-a) + s(s-b) + s(s-c)\right] \leq 3s^2 \end{aligned}$$

ve böylece $p \leq \sqrt{3}s$ bulunur.

Sonuç: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{3}s,$$
$$9r \leq w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{3}s$$

'dir.

Kanıt: $\overset{\Delta}{ABC}$ 'de $h_a \leq w_a \leq m_a$, $h_b \leq w_b \leq m_b$ ve $h_c \leq w_c \leq m_c$ olduğundan kanıt açıktır.

Teorem 1.2. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin dış teğet çemberlerinin merkezleri O_1, O_2, O_3, ve $O_1\overset{\Delta}{O_2}O_3$ ile $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenlerinin alanları sırasıyla F_1 ve F_2 ise,

$$\frac{F_1}{F_2} = 2\frac{R}{r}$$

'dir.

Kanıt: $O_1\overset{\Delta}{C}B$ üçgeninin alanı S_1 ,$O_2\overset{\Delta}{C}A$ üçgeninin alanı S_2 ve $O_3\overset{\Delta}{A}B$ üçgeninin alanı S_3 olsun. Bu durumda

$$F_1 = F_2 + S_1 + S_2 + S_3 \tag{0.1}$$

olur.

$$S_1 = \frac{a.r_a}{2}, S_2 = \frac{b.r_b}{2}, S_3 = \frac{c.r_c}{2}$$

olup bu değerler (0.1) 'de yerine yazılırsa,

$$F_1 = F_2 + \frac{a.r_a}{2} + \frac{b.r_b}{2} + \frac{c.r_c}{2}$$

ve

$$r_a = \frac{F_2}{s-a}, r_b = \frac{F_2}{s-b}, r_c = \frac{F_2}{s-c} \tag{0.2}$$

olduğundan

$$F_1 = F_2 + \frac{aF_2}{2(s-a)} + \frac{bF_2}{2(s-b)} + \frac{cF_2}{2(s-c)}$$

ve

$$\frac{F_1}{F_2} = 1 + \frac{a}{2(s-a)} + \frac{b}{2(s-b)} + \frac{c}{2(s-c)}$$

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c) + a(s-b)(s-c) + b(s-a)(s-c) + c(s-a)(s-b)}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$$

'dır.

$$F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \tag{0.3}$$

olduğundan

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{2F_2^2}{s} + s^2(a+b+c) - s\left[a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)\right] + 3abc}{\frac{2F_2^2}{s}} \tag{0.4}$$

'dir. $a+b+c = 2s$ olduğundan $b+c = 2s-a$, $a+c = 2s-b, a+b = 2s-c$ ve $F_2 = rs$, $abc = 4RF_2$ 'dir.

([2], Önerme 1.1) 'den $ab + ac + bc = r^2 + s^2 + 4Rr$ olduğundan $a^2 + b^2 + c^2 = 2s^2 - 2r^2 - 8Rr$ 'dir. Bu değerler (0.4) 'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{F_1}{F_2} &= \frac{2r^2s+2s^3-s\left[a(2s-a)+b(2s-b)+c(2s-c)\right]+3.4RF_2}{2r^2s}\\
&= \frac{2r^2s+2s^3-2s^2(a+b+c)+s(a^2+b^2+c^2)+12RF_2}{2F_2r}\\
&= \frac{2r^2s+2s^3-2s^22s+s(2s^2-2r^2-8Rr)+12RF_2}{2F_2r}\\
&= \frac{12RF_2-8Rrs}{2F_2r}=\frac{12RF_2-8RF_2}{2F_2r}=\frac{4RF_2}{2F_2r}=2\frac{R}{r}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 1.3. Her üçgende

$$\frac{ar_a+br_b+cr_c}{a+b+c}=2R-r$$

'dır.

Kanıt:

$$r_a=\frac{F}{s-a},r_b=\frac{F}{s-b},r_c=\frac{F}{s-c},$$

$ab+ac+bc=r^2+s^2+4Rr$, $abc=4RF$ ve $F^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$ eşitlikleri kullanılarak gösterilebilir.

Teorem 1.4. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde

$$3\sqrt{3}r\left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}}\leq h_a\tan\frac{\alpha}{2}+h_b\tan\frac{\beta}{2}+h_c\tan\frac{\gamma}{2}\leq s$$

'dir. Burada eşitliklerin geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

Kanıt:

$$p=h_a\tan\frac{\alpha}{2}+h_b\tan\frac{\beta}{2}+h_c\tan\frac{\gamma}{2}$$

diyelim.

$$h_a=\frac{2F}{a},h_b=\frac{2F}{b},h_c=\frac{2F}{c}$$

ve

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a},\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{s-b},\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s-c}$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
p&=\frac{2F}{a}\frac{r}{s-a}+\frac{2F}{b}\frac{r}{s-b}+\frac{2F}{c}\frac{r}{s-c}\\
&=2Fr\left[\frac{1}{a(s-a)}+\frac{1}{b(s-b)}+\frac{1}{c(s-c)}\right]
\end{aligned}$$

Aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$p\geq 3.2.Fr\frac{1}{\left[abc(s-a)(s-b)(s-c)\right]^{\frac{1}{3}}} \tag{0.5}$$

ve $abc = 4RF, F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ olduğundan

$$p \geq 6Fr\frac{1}{\left(4RF\frac{F^2}{s}\right)^{1/3}} = \frac{6r}{\left(\frac{4R}{s}\right)^{1/3}}$$

'dür. ([1].(9)) 'dan $s^2 \geq 27r^2$ olduğundan $s \geq 3\sqrt{3}\,r$ olup

$$p^3 \geq \frac{6^3r^3s}{4R} \geq \frac{6^3r^33\sqrt{3}}{4R} \Rightarrow p \geq 3\sqrt{3}r\left(\frac{2r}{R}\right)^{1/3}$$

Eşitsizliğin diğer yanı aşağıdaki eşitlik ve eşitsizliklerden gösterilir:

$$s^2 \geq 27r^2, F = rs, ab + ac + bc = r^2 + s^2 + 4Rr.$$

Teoremin ifadesinde eşitlik $a = b = c$ için sağlanır.

Teorem 1.5. Her $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde

$$3^{1+\frac{n}{2}}2^{n-1}r^n \leq a^n \sin\frac{\alpha}{2} + b^n \sin\frac{\beta}{2} + c^n \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{4}\sqrt{a^{2n+3} + b^{2n+3} + c^{2n+3}}$$

'dir. Burada eşitliklerin geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

Kanıt. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$ ve $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ eşitlikleri biliniyor. Aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$a^n \sin\frac{\alpha}{2} + b^n \sin\frac{\beta}{2} + c^n \sin\frac{\gamma}{2} \geq 3\left[(abc)^{n-1}r^2s\right]^{1/3} \tag{0.6}$$

([2],4.13) 'den

$$4\sqrt{3} \leq \frac{9abc}{a+b+c} \tag{0.7}$$

olup

$$a^n \sin\frac{\alpha}{2} + b^n \sin\frac{\beta}{2} + c^n \sin\frac{\gamma}{2} \geq 3^{1+\frac{n}{2}}2^{n-1}r^n$$

bulunur. Şimdi

$$x = a^n\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, y = b^n\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, z = c^n\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

denilip $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} x+y+z &\leq \sqrt{3}\left[\frac{a^{2n}(s-b)(s-c)}{bc} + \frac{b^{2n}(s-a)(s-c)}{ac} + \frac{c^{2n}(s-a)(s-b)}{ab}\right]^{1/2} \\ &\leq \sqrt{3}\left[\frac{a^{2n+1}(s-b)(s-c) + b^{2n+1}(s-a)(s-c) + c^{2n+1}(s-a)(s-b)}{abc}\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{0.8}$$

olur. Şimdi A.O-G.O. eşitsizliğinden

$$\frac{a}{2} = \frac{(s-b)+(s-c)}{2} \geq \sqrt{(s-b)(s-c)}$$

olup $(s-b)(s-c) \leq \frac{a^2}{4}$ ve benzer şekilde $(s-a)(s-c) \leq \frac{b^2}{4}, (s-a)(s-b) \leq \frac{c^2}{4}$ bulunur. Bu eşitsizlikler (0.8) 'de kullanılırsa $abc = 4RF$ olup

$$x+y+z \leq \sqrt{3}\left(\frac{a^{2n+3}+b^{2n+3}+c^{2n+3}}{16RF}\right)^{1/2}$$

bulunur. $F = rs$ eşitliği, $R \geq 2r$ ve $s^2 \geq 27r^2$ eşitsizlikleri yardımıyla

$$x+y+z \leq \frac{\sqrt{3}\sqrt{a^{2n+3}+b^{2n+3}+c^{2n+3}}}{4\sqrt{RF}} \leq \frac{\sqrt{3}\sqrt{a^{2n+3}+b^{2n+3}+c^{2n+3}}}{4(108)^{1/4}r\sqrt{r}}$$

$$x+y+z \leq \frac{\sqrt{a^{2n+3}+b^{2n+3}+c^{2n+3}}}{4(12)^{1/4}r\sqrt{r}}$$

bulunur. Üçgenin eşkenar olması durumunda eşitlik sağlanır.

Yazımızı aşağıdaki problemlerle bitirelim:

$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninde aşağıdaki eşitlik ve eşitsizliklerin varlığını kanıtlayınız:

1. $\frac{r_a}{\tan\frac{\alpha}{2}} + \frac{r_b}{\tan\frac{\beta}{2}} + \frac{r_c}{\tan\frac{\gamma}{2}} = 3s$
2. $\frac{a}{\tan\frac{\alpha}{2}} + \frac{b}{\tan\frac{\beta}{2}} + \frac{c}{\tan\frac{\gamma}{2}} = 2(r_a + r_b + r_c)$
3. $\frac{h_a+h_b}{a+b} + \frac{h_b+h_c}{b+c} + \frac{h_c+h_a}{c+a} = \frac{s}{R}$
4. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \leq \frac{r+1}{4r^2}$

KAYNAKLAR

[1] Radovan R. Janič, Deux Inégalites Relatives à Un Triangle, Publications de la Faculté d'electro technique de L'Université à Belgrade, No:195 (1967), 75-76.

[2] Mehmet Şahin, Üçgenin Elemanları Arasındaki Bazı Eşitlikler ve Eşitsizlikler I, Matematik Dünyası, Cilt 8, Sayı 4, (1999), 17-24.