GENEL MATEMATİK'TE (CALCULUS) ÖĞRENCİ HATALARI

Behiye Ubuz
Orta Doğu Teknik Universitesi,
Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, 06531-ANKARA

Giriş

Okullarda matematik öğrenmede/öğretmede pek çok güçlüklerin olduğu bilinmektedir. Söz konusu güçlüklerin nedenlerinden biri de hatalarla ilgilidir. Hatalar, basit olarak, öğrencilerin başarısızlıkları olarak değil, öğrencilerin yetersiz veya yanlış kavramsal anlamalarının belirtileri olarak düşünülmelidir. Diğer bir deyişle, hatalar, yanlış inanışlar sonucu ortaya çıkan davranışlar veya işlemlerdir. Bu nedenle matematik öğretmeni olarak bizler, öğrencilerimizin konuları kavramaları ve anlamaları ile ilgilenmek durumundayız. Yanlış kavrama veya anlama, eğer düzeltilmezse, öğrencinin bütün okul hayatı boyunca yapacağı hataların nedeni olabilir. Bunların çoğu sarsıntı doğuran deneyimlere, hayal kırıklığına ve matematiğe karşı olumlu bir tutum geliştirmemelerine neden olabilir. Bu incelemede öğrencilerin üniversite birinci sınıfta okudukları Genel Matematik (calculus) 'te yaptıkları hatalar ve yanılgılar açıklanacak, bu konuda öneriler sunulacaktır.

Genel Matematik, ileri düzeyde matematiğin başlangıcı, ve ileri konuların anlaşılmasında temel oluşturmaktadır. Son yirmi yıl, öğrencilerin Genel Matemati'ği kavramsal olarak anlamaları ile ilgili yayınlarda artışa tanık olmuştur (Monaghan, 1986; Orton, 1980; Selden, Mason and Selden, 1989; Tall, 1986; Ubuz, 1996). Bunun başlıca nedenleri, (i) ezbere işlem uygulamalarına yönelik eğilim, (ii) kavramsal anlamadaki yetersizlik ve (iii) ileri matematik öğretim ve öğrenimindeki kaliteyi yükseltmektir. Ezbere öğrenme, formüllerin ve kuralların hesaplama sorularını çözmek için hatırlanmasına bağlıdır. Kavramsal anlama veya kavram oluşumu ise, kavramaların gelişimi ve onların matematiğin temel ilkeleri ile ilişkileri çerçevesinde toplanmaktadır.

Genel Matematik'te çeşitli hatalara ve bunların kaynaklarına geçmeden önce, "anlama" ve "kavramsal yanılgı" 'nın ne olduğunun bilinmesi gerekir. Bir şeyi "anlamak" demek, onun uygun şema veya taslak içinde özümlenmesidir. "Kavramsal yanılgı" ise, bir kişinin bir konuyu veya problemi kendisine mantıklı gelecek şekilde kavraması, fakat bu alandaki uzman bir kişinin kavramsal anlaması ile çelişki içinde olmasıdır.

Genel Matematik' te Öğrenci Hatalarının Sınıflandırılması

Ubuz (1996) tarafından İngiltere'de Genel Matematik dersini alan birinci sınıf mühendislik öğrencileri üzerinde yapılan çalışma, ortaya çıkan hataların aşağıda verilen nedenlerden dolayı doğabileceklerini ortaya koymuştur:

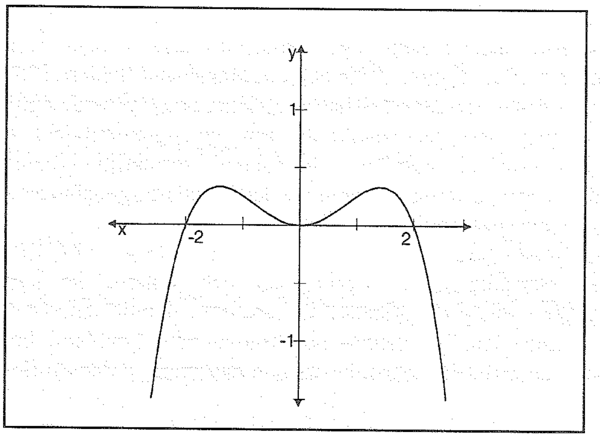
1. *Şekillerin, kavramların yerine konulması:* Bu tür kargaşa daha çok kavramlar açıklanırken çizilen şekillerin anlamının özümlenmemesinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, türevin geometrik anlamını anlatırken çizilen şekil veya resimden, teğetin eğimi yerine teğetin denkleminin türev olarak algılanması gibi. Öğrencilere "Türev'in anlamı nedir?" diye sorulduğunda, öğrencilerden şöyle bir cevap alınmıştır: "Geometrik olarak bir fonksiyonun türevi o noktadaki teğettir". Oysa doğru yanıt olarak, "türev bir fonksiyonun her noktadaki eğimini gösteren eğim fonksiyonudur", denmesi beklenir.

2. *Tanımların içeriklerinin anlaşılamaması:* Bu tür bir kargaşa, verilen tanımın bir bütün olarak anlaşılamamasından kaynaklanmaktadır. Genel Matematik kitaplarında verilen şu tanım,"eğer bir nokta diğer bir sabit noktaya yavaş yavaş yaklaşırsa, bu iki nokta arasındaki sekant doğrusunun eğimi küçük miktarlarda değişir ve esasen sabit sınır değerine yaklaşır", bazı öğrenciler tarafından "sekant doğrusunun eğimi küçük değere yaklaşıyor" olarak algılanıyor. Örneğin, öğrencilere "Türev'in anlamı nedir?" ve "$\frac{\delta y}{\delta x}$ 'in anlamı nedir" gibi sorular sorulduğunda, sırasıyla, şu cevaplar

alınmıştır: "Türev küçük bir değişikliktir" ve "$\frac{\delta y}{\delta x}$ eğimde küçük değişikliktir". Oysa, $\frac{\delta y}{\delta x}$, "$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y(x+h)-y(x)}{x+h-x} = \frac{y \text{ 'deki küçük değişme}}{x \text{ 'deki küçük değişme}}$" veya "bir sekant doğrusunun eğimi" olarak anlaşılmalıdır.

3. *Aynı kapsam ve çerçevede sıklıkla oluşan ilgili sembollerin ayırt edilememesi:* Bu tür kargaşa özellikle bir kavramı açıklarken kullanılan birbiriyle ilgili sembollerin ayırt edilememesinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, $\frac{\delta y}{\delta x}$ ile $\frac{dy}{dx}$ ve $\sum f(x)\delta x$ ile $\lim \sum f(x)\delta x$ karıştırılmaktadır. Bu semboller ikişer ikişer sırayla 'türev' ve 'integral' kavramlarının tanımında birlikte kullanılmaktadır.

4. *Grafiksel bilgilerin sembolik gösterimlerde kullanım zorlukları:* Aşağıda (5) 'te açıklandığı üzere, öğrenciler bazı durumlarda bilinmeyeni bulmaya çalışıyorlar, fakat bunu yaparken grafiksel ve sembolik gösterimler arasında bağlantı kuramamaktadır. Örneğin, aşağıda grafiği verilen, fakat denklemi bilinmeyen ($y=\left(\frac{-x^4}{12}\right)+\left(\frac{x^2}{3}\right)$ verilmiyor) bir grafiğe bakarak türevin grafiğinin çizilmesi istendiğinde öğrenci ilk önce fonksiyonun denklemini bulmaya çalışıyor.



Bu süreçte, öğrenci fonksiyon denklemini $y=\left(\frac{-x^4}{12}\right)+\left(\frac{x^2}{3}\right)$ yerine, çoğu kez $y=x^4$ olarak düşünüyor. Oysa, verilen grafik bu düşünülen fonksiyon denkleminden farklı özellikler göstermektedir. Verilen grafik eğimi sıfır olan üç tane nokta gösterirken, $y=x^4$ denklemi eğimi sıfır olan yalnızca bir nokta göstermektedir.

5. *Bilinmeyeni bilme eğilimi:* Bu tür yaklaşım daha çok yorum gerektiren etkinliklerde ortaya çıkmaktadır. Çünkü, kişiler işlemsel etkinlikleri yorumsal etkinliklere göre daha kolay bulmakta; işlemsel etkinliklere okullarda daha fazla ağırlık verilmektedir. Örneğin, yukarıda (4) 'te belirtildiği gibi, bazı öğrenciler fonksiyon denklemi verilmeyen bir grafikte türevin grafiğini çizerken, verilen grafiği yorumlama yerine bilinmeyen denklemi bulmaya çalışıyorlar.

6. *Dar veya sınırlı görüş açısı:* Bu tür sınırlı görüş açısı, öğrencilerin daha çok belirli uygulama örnekleri üzerinde çalışmaları ve farklı uygulama örnekleri üzerinde çalışmamalarından kaynaklanmaktadır. Böylece öğrenciler belirli uygulama örnekleri içinde bulunan özellikleri pekiştirebilmekte ve gerektiğinde hatırlayıp kullanabilmektedir. Örneğin, bazı öğrencilerin dönüm noktasıyla ilgili sahip olduğu kavramsal imge, bir eğri üzerinde bulunan ve x-eksenini kesen noktadan başka noktayı içermemektedir. Halbuki, dönüm noktası fonksiyonun grafiği üzerinde bulunan başka herhangi bir nokta da olabilir.

7. *Özel bir durumun uygun olmayan bir şekilde genelleştirilmesi:* Bu tür kargaşa daha çok bir kavram açıklanırken belirtilen özel bir durumun, kavram bilgisinin bütünü olarak algılanmasından kaynaklanmaktadır. Burada aynı zamanda, yukarıda (3)'te belirtilen durum da söz konusudur. Örneğin, bir fonksiyonun bir noktadaki türevi ile türev fonksiyonunun aynı olarak algılanması gibi. Oysa, bir fonksiyonun bir noktadaki türevi ve türev fonksiyonu biribirinden farklıdır.

8. *Bir sözcüğün bir başka sözcük ile uygun olmayan bağlantısı:* Bu tür kargaşa sözcüklerin yüzeysel benzerliklerinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, "azalan" ve "eksi" gibi. Bir fonksiyon eksi değer alıyorsa azalan olarak düşünülüyor. Benzer biçimde, "artan" ve "artı" için de aynı durum söz konusudur.

Sonuç ve Öneriler

Bu ve diğer çalışmalar göstermiştir ki:

1. Öğrenciler, Genel Matematik yöntemlerini, tamamen zayıf kavram imgeleri üzerine kurulan algoritmik düzeyde öğreniyor. Kavramların gelişimi sürecinde çıkarımların yapılmasına engel olan en önemli konuların başında fonksiyon ve limit kavramları gelmektedir.

2. Gözde canlandırma nadir olarak yapılmakta ve eğer yapılırsa da, görsel/grafiksel ve çözümsel/cebirsel gösterimler arasında bilişsel bağlantı büyük bir problem yaratmaktadır.

Yukarıdaki bulgu ve yorumların karşılaştırılmasını sağlamak amacıyla ülkemizde yapılan çalışmalara rastlanmadığından, temsil edileceği daha geniş örneklem veya konu üzerinde yürütülen benzer çalışmaların yapılmasına ihtiyaç vardır. Bu tür çalışmalar ile matematik konularını öğrenmede kültürler arasında ne gibi farklar olduğu ortaya çıkacaktır. Bu konular ile ilgili yapılmakta olan araştırmalar sürmekte olup elde edilen bulgular daha sonra rapor edilecektir.

KAYNAKLAR

Monaghan, J. (1986): *Adolescent's Understanding of Limits and Infinity.* Unpublished Ph.D Thesis, University of Warwick.

Orton, A. (1980): *A Cross-Sectional Study of the Understanding of Elementary Calculus in Adolescents and Young Adults.* Unpublished Ph.D Thesis, University of Leeds.

Selden, J., Mason, A. and Selden, A. (1989): "Can average students solve nonroutine problem". *The Journal of Mathematical Behavior*, 8, 45 - 50.

Tall, D. (1986): *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics.* Unpublished Ph.D Thesis, University of Warwick

Ubuz, B. (1996): *Evaluating the Impact of Computers on the Learning and Teaching of Calculus.* Unpublished Ph.D Thesis, University of Nottingham.

MATEMATİKSEL ÖZDEYİŞLER

Auden, W. H. (1907-1973): *"Matematikçilerin pek çoğu ne kadar da mutludur! Kendisi yalnızca eşdeğerleriyle yargılanır, ve burada standart öylesine yüksektir ki hiç bir çalışma arkadaşı ya da rakibi hak etmediği bir saygınlığı kazanamaz."*

Bell, Eric Temple (1883-1960): *"Öklit, bana varsayımlar olmaksızın kanıtlamanın yapılamayacağını öğretmişti. O halde, herhangi bir tartışmada önce varsayımları araştırınız."*

Bohr, Niels Henrik David (1885-1962): *"Uzman, çok dar bir alanda yapılabilecek tüm hataları yapmış olan kişi demektir."*