GEOMETRİ VE TRİGONOMETRİNİN CEBİRDE BAZI UYGULAMALARI (1)

Diba Yılmaz-Ali Cevahir
Akdeniz Koleji Fen Lisesi, ANTALYA

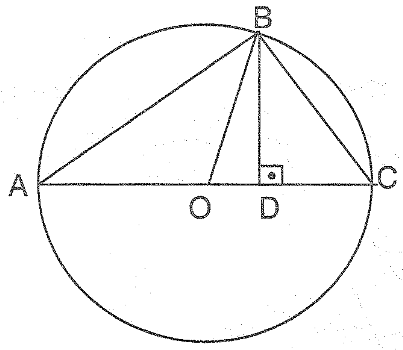
Giriş

"Koordinatlar metodu" adı ile bilinen metodun geometride bir devrim yarattığı ve bunun sonucu olarak "Analitik Geometri" denilen bir matematik dalının nasıl geliştiği iyi bilinmektedir. Analiz ve cebir yöntemlerinin geometride nasıl uygulanabileceğinin somut kanıtı olan analitik geometri, klasik geometrinin pek çok sorulsuna daha kısa ve açık çözümler bulmaktadır. Doğal olarak şöyle bir soru ortaya konulabilir: "Acaba, sırf geometrik yöntemler kullanarak cebir ve analizin bazı problemlerini çözmek mümkün müdür? Yani, analiz geometride kullanıldığı gibi, geometri de analizde (ve cebirde) kullanılabilir mi?"

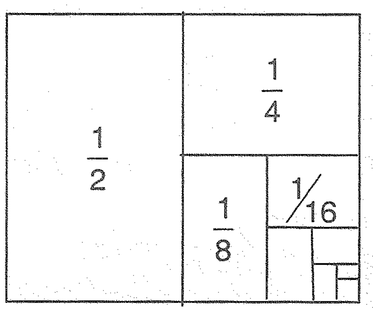
Önce bu soruya "evet" cevabını veren iki klasik örnek gösterelim.

Birinci örnek, "Aritmetik-Geometrik Ortalamalar Eşitsizliği" adı ile bilinen $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ eşitsizliğidir.

Fazla ayrıntıya gerek görmeden ,
şekilden |AD|=a, |DC|=b olmak üzere,
$|OB| = \frac{a+b}{2}$ ve $|BD| = \sqrt{ab}$ olduğu ve
|BD| ≤ |OB| sağlandığı kolayca görülebilir.



İkinci klasik örnek, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$
eşitliğinin geometrik ispatıdır. Birim karenin alanı, onun yarısının, sonra yarısının, ... alanları toplamına eşittir. (Şekile bakınız.)



Bu çalışmada biz, cebir ve analizin bazı problemlerini geometri ve trigonometrinin yöntemlerini uygulayarak çözmenin mümkün olduğunu göstermek istedik. Bunu da vurgulayalım ki, bazı cebir problemlerini direkt cebirsel yöntemlerle çözmeye kalkışmak işi oldukça zorlaştırabilir. Oysa geometrik (trigonometrik) yöntem kullanılarak söz konusu problem çok daha kısa bir yolla çözülebilir. Buna örnek olarak, aşağıdaki iki problemi gösterebiliriz. (Çözümler daha sonra verilecektir.)

Problem 1. [0,1] aralığında alınan her x, y, z ve t için

$$x(1-t) + y(1-x) + z(1-y) + t(1-z) \leq 2$$

olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2. 13 tane reel sayı verildiğinde, bunlardan a ve b gibi öyle iki tanesi bulunabilir ki

1. Geometrik Yöntemlerin Bazı Cebir Problemlerine Uygulanması

İlk uygulamamızı tamsayılarda çözülen denklemlere (diyofant denklemlere) yapalım:

$p^2 + r^2 = 2q^2$ denklemini tamsayılar kümesinde çözelim. Diyofant denklemleri ile uğraşanlar "direkt" çözüm yolu aramanın ne kadar zor olduğunu iyi bilirler.

Bu problemin çok güzel bir geometrik çözüm yolu vardır. Önce denklemin her iki yanını q^2 ile bölerek

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{r}{q}\right)^2 = 2 \quad \text{biçimine ve buradan da} \quad \frac{p}{q} = x,\ \frac{r}{q} = y$$

diyerek $x^2 + y^2 = 2$ biçimine indirgiyoruz. Böylece, $x^2 + y^2 = 2$ denklemini rasyonel sayılar kümesinde çözmeliyiz. Şimdi, bu denklemi çözmek, $x^2 + y^2 = 2$ çemberi üzerindeki tüm rasyonel koordinatlı (x,y) noktalarını bulmak demek oluyor. Bu tür noktalardan birini alalım. Örneğin, (-1, -1) noktasını. Eğer bu noktadan ve çember üzerindeki başka bir "rasyonel" (x, y) noktasından doğru geçirirsek, bu doğrunun eğimi $t = \dfrac{y+1}{x+1}$ bir rasyonel sayı olur. Bunun tersi de doğrudur: (-1, -1) noktasından geçen ve eğimi $t \neq -1$ - bir rasyonel sayı olan her bir doğru bu çemberi başka bir (x, y) - "rasyonel noktası"nda kesecektir. Buna inanmak için (-1, -1) den geçen ve eğimi $t \neq -1$ olan doğrunun $y = t(x+1) - 1$ denklemini çember denkleminde gözönüne alalım:

$$x^2 + (t\cdot(x+1) - 1)^2 = 2\ , \quad (1+t^2)\,x^2 - 2t\,(1-t)\,x + (t^2 - 2t - 1) = 0\ .$$

Bu x 'e göre bir ikinci dereceden denklemdir. Onun köklerinden birisi (-1) 'dir. Vieta Teoremini kullanarak ikinci kökü buluyoruz:

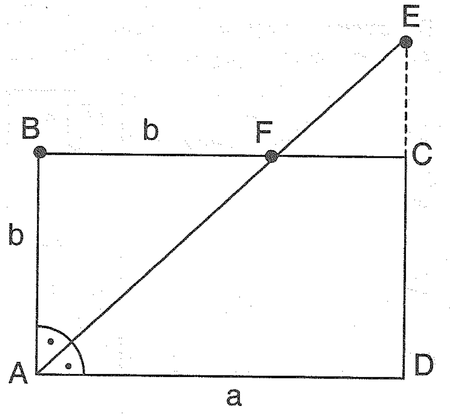
$$x = \frac{-t^2 + 2t + 1}{t^2 + 1}, \quad y = t\,(x+1) - 1 \quad \text{'den ise y 'yi buluyoruz.} \quad y = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}\,.$$

Böylece, her rasyonel $t \neq -1$ sayısı için $x^2 + y^2 = 2$ çemberi üzerinde bir (x, y) "rasyonel noktası" bulduk. Burada $t = \dfrac{m}{n}$ koyarsak ve $x = \dfrac{p}{q}$, $y = \dfrac{r}{q}$ olduğunu da gözönüne alırsak, ilk önce verilen $p^2 + r^2 = 2q^2$ denkleminin tam sayılarda çözümlerini buluruz:

$$p = -m^2 + 2mn + n^2\,, \qquad q = m^2 + n^2, \qquad r = m^2 + 2mn - n^2$$

İkinci uygulamamız, $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ eşitsizliğinin bir başka, çok ilginç (ve basit) ispatına aittir. $a \geq b > 0$ olsun. Kenar uzunlukları a ve b olan dikdörtgen alalım.

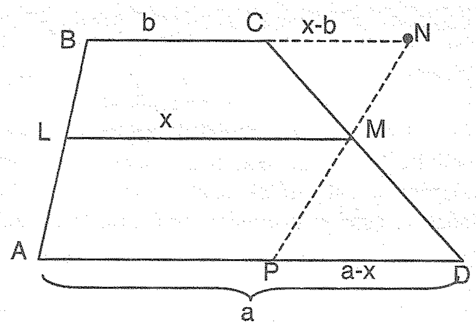
A açısının açıortayını çizelim ve bu açıortayla DC doğrusunun kesişimine E diyelim. |BF|=b ve |DE|=a olduğu açıktır. Şekilden de açıkça görüldüğü gibi, ABCD dikdörtgeninin alanı, ABF ve AED üçgenlerinin alanlarının toplamından büyük olamaz:



a yerine $\sqrt{x}$, b yerine $\sqrt{y}$ yazarsak, buradan $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ elde edilir.

Şimdi de geometrik yöntemler kullanarak 2 sayının aritmetik ortalamasının onların karesel ortalamasından büyük olamayacağını, yani $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ eşitsizliğini kanıtlayalım. a=b için eşitlik olduğundan a> b olduğunu varsayabiliriz.

Taban uzunlukları a ve b olan ABCD yamuğunu çizelim. LM // AD doğrusunu, ABCD 'nin alanı yarıya bölünecek biçimde çizelim. |LM|=x diyelim ve x 'i bulalım. M noktasından NP // BA geçirelim. LBCM yamuğunun yüksekliğine h_1 ve ALMD 'nin yüksekliğine de h_2 dersek, alanların eşitliğinden:



$$h_1 \cdot \frac{b+x}{2} = h_2 \cdot \frac{a+x}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{a+x}{b+x}$$ olur.

CNM ve PMD üçgenlerinin benzerliğinden ise, $\frac{h_1}{h_2} = \frac{x-b}{a-x}$ olur. Bu ikisinden,

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{x-b}{a-x} \quad \Rightarrow \quad a^2 - x^2 = x^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$ olur.

Öte yandan b < a olduğu için alanların eşitliğinden, LM doğrusunun BC ye değil, AD ye daha yakın olduğunusöyleyebiliriz. Yani, LM parçası AD parçası ile yamuğun orta tabanı arasında bulunmalıdır:

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le a \ .$$

Çok ilginç özellikleri ile matematikçileri yüz yıllardır hayrete salan Fibonacci dizilerinin bir çok özelliği geometrik olarak yorumlanabilir. Klasik Fibonacci dizisi şöyle tanımlanıyor:

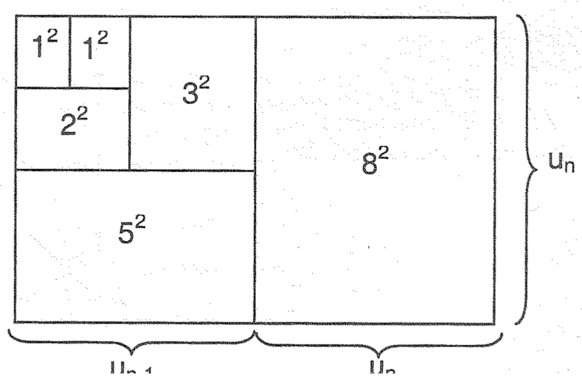
$$u_1 = u_2 = 1\ , \quad u_3 = u_2 + u_1, \quad u_4 = u_3 + u_2 ,\ldots, u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \ldots$$

(Dizinin baştan ilk terimleri 1,1,2,3,5,8,13,.., tür.)

Fibonacci dizisinin iyi bilinen özelliklerinden birisi de şöyledir: Her n $\geq$ 1 için,

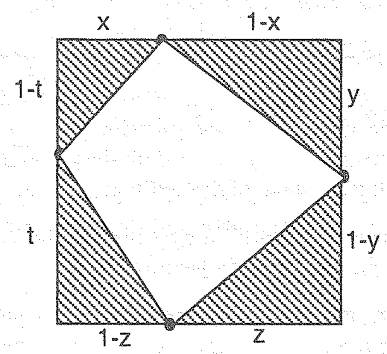
$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$$

Bunun cebirsel ispatının yanısıra, basit geometrik ispatı da vardır:



Şekilden de anlaşılacağı üzere karelerin alanları toplamı dikdörtgenin alanına eşittir, yani ,
$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$ 'dir.

Bu bölümü girişte verdiğimiz birinci eşitsizliğin geometrik ispatı ile bitirelim . 1x1 karesi alalım ve kenarlarını x, 1-x, y, 1-y, z, 1-z, t, 1-t uzunlukta parçalara bölelim. Taralı üçgenlerin alanları toplamı karenin alanından büyük olamayacağından,



$$\frac{1}{2}x(1-t) + \frac{1}{2}y(1-x) + \frac{1}{2}z(1-y) + \frac{1}{2}t(1-z) \leq 1$$

ve buradan, $x(1-t) + y(1-x) + z(1-y) + t(1-z) \leq 2$ olur.

Bunu da belirtelim ki, eşitsizliğin sağında 2 'den daha küçük sayı almak mümkün değildir. Çünkü $x = z = 0$ ve $y = t = 1$ koyarsak, 2=2 elde edilir. Söz konusu eşitsizliğin bu kadar basit geometrik ispatı olmasına karşın, cebirsel ispatı hiç de kolay değildir.

MATEMATİKSEL ÖZDEYİŞLER

Cayley, Arthur (1821-1895): *"Her şeyde olduğu gibi, bir matematiksel kuramda da güzellik kavranabilir, ancak açıklanamaz."*

Churchman, C. W. : *"Entellektüel kapasitemizin ölçüsü, daha iyi ve giderek daha da iyi problemlere verdiğimiz yanıtlarla kendimizi daha az ve giderek daha da az mutlu hissetme kapasitemizdir."*

Darwin, Charles (1809-1882): *"Her bir keşif, biçimsel olarak, matematikseldir; çünkü elimizde başka hiç bir yol gösterici yoktur."*

Dehn, Max (1878-1952): *"Matematik, tümüyle doğmatik olmayan bir biçimde sunulabilen biricik yapısal araçtır."*

De Morgan, Augustus (1806-1871): (Yaşı sorulduğunda) *"x^2 yılında x yaşında idim."*

Descartes, René (1596-1650): *"Çözdüğüm her problem, daha sonra diğer problemlerin çözümüne yardımcı olan bir kurala dönüştü."*

Descartes, René (1596-1650): *"İyi bir belleğe sahip olmak yeterli değildir. Burada önemli olan şey onu iyi kullanmaktır.*

Descartes, René (1596-1650): *"Benim için her şey matematiğe dönüşür."*

Doyle, Arthur Conan (1859-1930): *"Olanaksızı elediğinizde geriye kalan şey, olabilir olmasa bile, gerçek olmalıdır."*

Einstein, Albert (1879-1955): *"Her şey olabildiğince basit olmalıdır, ama daha da basit değil."*

Einstein, Albert (1879-1955): *"Matematikçilerin görecelik kuramını istilasından sonra kendim bile onu tanıyamaz duruma geldim."*

Einstein, Albert (1879-1955): *"Sağduyu 18 yaşına gelene kadar elde edilen önyargıların toplamıdır."*

Einstein, Albert (1879-1955): *"Gerçekten büyük ve esin dolu her şey, özgürlük içinde çalışan kişilerce yaratılır."*