

BİR ÖSS SORUSU ÜZERİNE NOTLAR

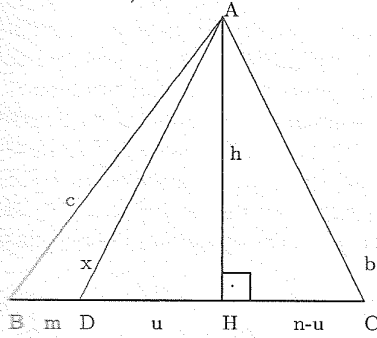
Fikri Gökdal

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

İddia: Bir ABC üçgeni ve $[BC]$ 'nin D ile gösterilen bir iç noktası verildiğinde, A noktasının B, D, C noktalarına uzaklığı, sırayla c, x, b ile; B noktasının D, C noktalarına uzaklığı, sırasıyla m, a ile ve D noktasının C noktasına uzaklığı da n ile gösterilmek üzere a, b, c, m, n, x arasında,

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \quad (*)$$

bağıntısı vardır. (Bu bağıntı, Stewart bağıntısı olarak bilinir.)



İspat. A noktasından BC doğrusuna indirilen dikmenin ayağı H ile gösterildiğinde; ABH, ADH ve AHC dik üçgenleri oluşur. $c > b$ ve $|DH| = u$ kabul edilip Pisagor Teoremi uygulandığında;

$$c^2 = (m+u)^2 + h^2 \quad (1)$$

$$x^2 = u^2 + h^2 \quad (2)$$

$$b^2 = (n-u)^2 + h^2 \quad (3)$$

elde edilir. (1) ve (2) 'den,

$$\begin{aligned} c^2 - x^2 &= (m+u)^2 + u^2 \\ &= (m+u-u)(m+u+u) \\ &= m(m+2u) \end{aligned}$$

ve buradan,

$$x^2 = c^2 - m^2 - 2mu \quad (4)$$

(2) ve (3) 'ten,

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 &= (n-u)^2 - u^2 \\ &= (n-u+u)(n-u-u) \\ &= n(n-2u) \end{aligned}$$

ve buradan da,

$$x^2 = b^2 - n^2 + 2nu \quad (5)$$

(4) ve (5) 'ten,

$$\begin{aligned} nx^2 + mx^2 &= n(c^2 - m^2 - 2mu) \\ &\quad + m(b^2 - n^2 + 2nu) \\ (m+n)x^2 &= nc^2 - nm^2 - 2nm\mu \\ &\quad + mb^2 - mn^2 + 2mnu \\ (m+n)x^2 &= mb^2 + nc^2 - mn(m+n) \end{aligned}$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \quad (*)$$

bulunur. Bu bağıntı,

(i) $b = c$ iken,

$$ax^2 = mb^2 + nb^2 - mna$$

$$ax^2 = ab^2 - mna$$

$$x^2 = b^2 - mn \quad (6)$$

biçimini,

(ii) $b = x$ iken,

$$ax^2 = mx^2 + nc^2 - mna$$

$$(a-m)x^2 = nc^2 - mna$$

$$nx^2 = nc^2 - mna$$

$$x^2 = c^2 - ma \quad (6)$$

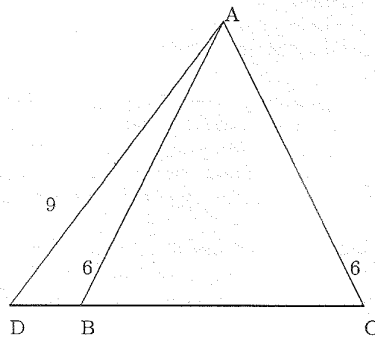
biçimini alır.

(7) bağıntısı, ÖSS'99 sınavında sunulmuş olan:

"ADC bir üçgen,

$$|AD| = 9 \text{ cm}, |AB| = |AC| = 6 \text{ cm}.$$

Şekil 1



Yukardaki verilere göre, $|DB||DC|$ çarpımının sayısal değeri kaçtır?" sorusunun çözümünde kullanılabilir.

(7) bağıntısındaki x , c ve ma 'nın bu sorudaki karşılıkları sırasıyla 6, 9 ve $|DB||DC|$ 'dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}x^2 &= c^2 - ma \\6^2 &= 9^2 - |DB||DC|\end{aligned}$$

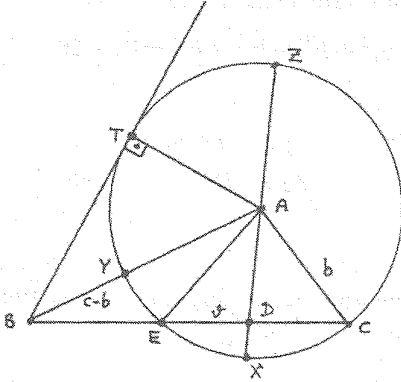
ve buradan,

$$|DB||DC| = 45$$

bulunur.

Allandırmalar aynı kalmak üzere (*) bağıntısı

Şekil 2



çemberden yararlanılarak elde edilebilir: Merkezi A, yarıçapı b olan çember ile $[BC]$ 'nin kesişim noktası E ile, B noktasından çembere çizilen teğetlerden birinin çembere değdiği nokta T ile gösterildiğinde, B noktasının bu çembere göre kuvveti,

$$|BT|^2 = |BE| \cdot |BC|$$

ve BTA dik üçgeninde Pisagor Teoreminden dolayı

$$|BT|^2 = c^2 - b^2$$

'dir. O halde,

$$|BE| \cdot |BC| = c^2 - b^2 \quad (8)$$

'dir. Diğer taraftan AD doğrusunun çemberle kesişim noktaları X ve Z ile gösterilmek üzere,

$$|DE| \cdot |DC| = |DX| \cdot |DZ| = (b-x)(b+x)$$

$$|DE| \cdot |DC| = (b^2 - x^2) \quad (9)$$

bulunur $|BE| = |BD| - |DE| = m - v$, $|BC| = a$ yazılarak (8) 'den,

$$a(m - v) = c^2 - b^2$$

ve (9) 'dan

$$v(a - m) = b^2 - x^2$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}a(m - v) &= c^2 - b^2 \\m - v &= \frac{c^2 - b^2}{a} \\v &= m - \frac{c^2 - b^2}{a} \\v &= \frac{ma - c^2 + b^2}{a}\end{aligned}$$

'dir. v 'nin bu değeri $v(a - m) = b^2 - x^2$ eşitliğinde yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}\left(\frac{ma - c^2 + b^2}{a}\right)(a - m) &= b^2 - x^2 \Rightarrow \\(ma - c^2 + b^2)(a - m) &= ab^2 - ax^2 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$ma(a - m) - c^2(a - m) + b^2(a - m) = ab^2 - ax^2$$

olur. $m + n = a$ olduğundan bu ifade,

$$man - c^2n + b^2n = ab^2 - ax^2$$

biçimini alır. Buradan,

$$\begin{aligned}ax^2 &= ab^2 - nb^2 + nc^2 - mna \\&= (a - n)b^2 + nc^2 - mna\end{aligned}$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \quad (*)$$

elde edilir. Bağıntının elde edilmesinde kullanılan bu metot az önce sözü edilen ÖSS sorusunun çözümünde kullanılabilir:

Şekil 2'deki D ve E noktaları çakıştığında B noktasının çembere göre kuvveti,

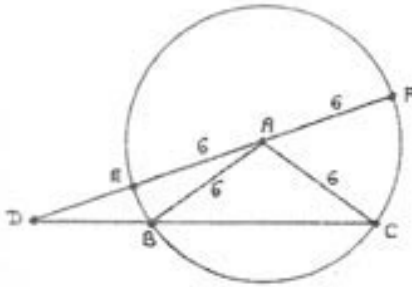
$$|BD| \cdot |BC| = c^2 - b^2$$

olacağından, söz konusu sorunun çözümü $c = 9$ ve $b = 6$ için

$$|BD| \cdot |BC| = 9^2 - 6^2 = 45$$

olarak elde edilir.

Şekil 3



Bu yaklaşım, basit bir çözümün elde edilmesini sağlar: A merkezli ve 6 yarıçaplı çemberin AD doğrusu ile kesişim noktaları E ve F ile gösterilmek üzere, D noktasının bu çembere göre kuvveti yazılarak (Şekil 3),

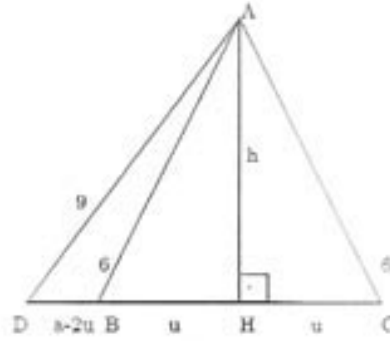
$$\begin{aligned} |DB| \cdot |DC| &= |DE| \cdot |DF| \\ &= (9 - 6)(9 + 6) = 3 \cdot 15 = 45 \end{aligned}$$

bulunur.

Bir ikiz kenar üçgende, tepeden tabana indirilen dikmenin ayağı (olan nokta) tabanın orta noktasıdır. Sözü edilen soru bu bilgi kullanılarak da çözülebilir:

ABC ikizkenar üçgen ve $|AB| = |AC| = 6$ olduğundan, A'dan BC kenarına indirilen dikmenin ayağı olan H noktası $[BC]$ 'nin orta noktasıdır.

Şekil 4



$|AH| = h$ ve $|BH| = |HC| = u$ kabul edilip ADH ve ABH üçgenlerine Pisagor Teoremi uygulandığında,

$$(a - u)^2 + h^2 = 81, \quad u^2 + h^2 = 36$$

bulunur. Taraf tarafa çıkarma ile,

$$[(a - u)^2 + h^2] - [u^2 + h^2] = 81 - 36$$

$$(a - u)^2 - u^2 = 45$$

$$(a - u - u)(a - u + u) = 45$$

$$(a - 2u)a = 45 \Rightarrow |DB| \cdot |DC| = 45$$

elde edilir.

Yine, söz konusu sorunun çözümü, \hat{BAC} açısının ölçüsüne göre basitleştirilebilir:

1. $\hat{BAC} = 60^\circ$ alınabilir. Bu durumda ABC üçgeni eşkenar üçgen ve bu üçgenin herhangi bir yüksekliği $3\sqrt{3}$ olduğundan $|DB| = m$ kabul edilerek;

$$81 = (3 + m)^2 + (3\sqrt{3})^2$$

$$36 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow$$

$$45 = (3 + m)^2 - 3^2 = m(m + 6) = |DB| \cdot |DC|$$

elde edilir.

2. $\hat{BAC} = 90^\circ$ alınabilir. Bu durumda $B \equiv C = H$ olur ve ADH dik üçgeninden $|DB| \cdot |DC| = |DH|^2 = 9^2 - 6^2 = 45$ bulunur.

3. $\hat{BAC} = 90^\circ$ ve $|DB| = m$ alınarak,

$$(m + 3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 81$$

$$(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 36$$

'dan, taraf tarafa çıkarma ile,

$$m(m + 6\sqrt{2}) = 45$$

bulunur.

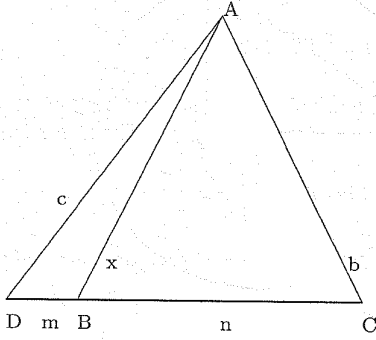
(*) bağıntısı ve dolayısıyla söz konusu problemin çözümü vektörlerin iç çarpımından yararlanılarak elde edilebilir.

Başlangıç noktaları aynı olan \vec{a} ve \vec{b} gibi iki vektör arasındaki açı (\vec{a}, \vec{b}) ile gösterilmek üzere, bu iki vektörün (öklidyen) iç çarpımı,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||a|| ||b|| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

ile tanımlanır. ($||\vec{x}||$: \vec{x} vektörünün uzunluğunu gösterir.)

Şekil 5



Şekil 5'ten,

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{AD} + \vec{DB} \\ (\vec{AB})^2 &= (\vec{AD} + \vec{DB})^2 \\ (\vec{AB})^2 &= \vec{AD}^2 + 2\vec{AD} \cdot \vec{DB} + \vec{DB}^2 \end{aligned}$$

ve yine aynı şekilden,

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{AC} + \vec{CB} \\ (\vec{AB})^2 &= (\vec{AC} + \vec{CB})^2 \\ (\vec{AB})^2 &= \vec{AC}^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{CB} + \vec{CB}^2 \end{aligned}$$

bulunur. Karşılıkları yazılarak,

$$\begin{aligned} x^2 &= c^2 - 2cm \cos B + m^2 \\ x^2 &= b^2 - 2bn \cos C + n^2 ; \end{aligned}$$

buradan birinci eşitlik n , ikinci eşitlik m ile çarpılıp taraf tarafa toplanarak,

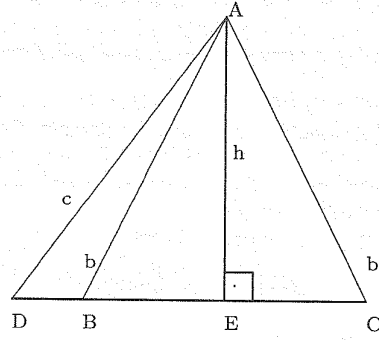
$$\begin{aligned} nx^2 + mx^2 &= nc^2 - 2cmn \cos B + nm^2 + mb^2 \\ &\quad - 2bmn \cos C + mn^2, \\ (n + m)x^2 &= nc^2 + mb^2 - 2mn(c \cos B + b \cos C) \\ &\quad + nm(m + n), \end{aligned}$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - 2mna + nma$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \quad (*)$$

bulunur.

Şekil 6



Şekil 6'da $|AB| = |AC|$,

$$\begin{aligned} \vec{DB} \cdot \vec{DC} &= (\vec{DE} - \vec{BE}) \cdot (\vec{DE} + \vec{EC}) \\ &= (\vec{DE})^2 - (\vec{BE})^2, \end{aligned}$$

$|\vec{DE}| = c \cos B$ ve $|\vec{BE}| = b \cos C$ 'dir:

$$\begin{aligned} (\vec{DE})^2 - (\vec{BE})^2 &= c^2(1 - \sin^2 B) - b^2(1 - \sin^2 C) \\ &= c^2 - b^2 \sin^2 C - c^2 \sin^2 B = c^2 - b^2. \end{aligned}$$

Değerler, yerlerine yazıldığında sorunun cevabı,

$$\begin{aligned} \vec{DB} \cdot \vec{DC} &= ||\vec{DB}|| \cdot ||\vec{DC}|| \cos 0 \\ &= c^2 - b^2 = 9^2 - 6^2 = 45 \end{aligned}$$

bulunur.

-o-